

N° D'ORDRE

160

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

PAR

J. P. GIVRY

Ingénieur Civil des Mines

PREMIÈRE THÈSE

Problèmes de renouvellements aléatoires

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 6 février 1964 devant la commission d'examen
constituée de

MM. MALECOT

Président

MARTEL

PARIS

} Membres du Jury

N. D'ORDRE

160

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

PAR

J. P. GIVRY

Ingénieur Civil des Mines

PREMIÈRE THÈSE

Problèmes de renouvellements aléatoires

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 6 février 1964 devant la commission d'examen
constituée de

MM. MALECOT
MARTEL
PARIS

Président

} Membres du Jury

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

Doyens honoraires

MM. LONGCHAMBON, DOUIN, MOUSSA, GAUTHIER Henri

Professeurs honoraires

MM. LOCQUIN, de LARAMBERGUE, SOLLAUD, MENTZER, MOUSSA, JAFFARD, DOUIN, Henri EYRAUD, DEJARDIN, VIRET

Doyen

M. BRACONNIER

Assesseurs

MM. MESNARD, BODIN

Professeurs

MM. LONGCHAMBON	Minéralogie	MM. SARAZIN	Physique nucléaire
PRETTRE	Chimie industrielle	BODIN	Microbiologie et Mycologie
COURTY	Chimie-Physique	PERES	Physiologie
KUHNER	Botanique	MESNARD	Electronique
MALECOT	Mécanique rationnelle et appliquée	GRANDMONTAGNE	Physique
PARIS	Chimie minérale	BOUTILIER	Minéralogie
AUMERAS	Chimie	LAFOUCRIERE	Physique nucléaire
COLONGE	Chimie organique	DREUX	Chimie organique
JANIN	Physique expérimentale	TEICHNER	Chimie industrielle
FLANDRIN	Géologie appliquée	PAVANS de CECCATTY	Zoologie
BERNARD	Physique industrielle	MERLIN	Chimie analytique
DUFAY Jean	Astronomie	DUFAY Maurice	Physique de l'Atmosphère
NIGON	Zoologie expérimentale	FRAISSE	Mathématiques
GAUTHIER Henri	Géologie générale	LUBET	Physiologie
WAUTIER	Zoologie	PHILBERT	Physique nucléaire
CHOPIN	Chimie biologique	COHEN-ADAD	Chimie
CUEILLERON	Chimie	DAVID Louis	Géologie Générale
BRACONNIER	Calcul différentiel et intégral	CHANEL	Psychophysiologie
EYRAUD Charles	Chimie-Physique appliquée	MAURY	Méthodes Mathématiques de la Physique

Professeurs sans chaire

MM. GAUME	Physique	MM. GAUTHIER Jean	Chimie
DEPRAZ	Physique nucléaire	CHENEVOY	Géologie appliquée
FERON	Mathématiques	GINET	Zoologie
LAFORQUE	Physique	ASCH	Physique
LEGAY	Zoologie expérimentale S. P. C. N.	MICHEL Pierre	Minéralogie
UZAN	Physique S. P. C. N.	DUCET	Biologie végétale

Maîtres de Conférences

Mlle MAITROT	Physique	FRBEIA	Physique
Mme ERICSON	Physique générale	DESCOTES	Chimie organique
GEVIN	Géologie générale	PICARD Philippe	Mathématiques
PONASSE	Mathématiques	LEMOIGNE	Botanique
d'INCAN	Physique	DEMARCO	Géologie générale
MARTEL	Mécanique	MICHEL Georges	Biochimie
LEFEBVRE	Mathématiques	LEBRETON	Biologie végétale
PERNET	Mathématiques	DAVID Jean	Biologie animale
CHERY	Physique	TOUSSET	Chimie propédeutique
BERGEON	Physique C. S. U.	FEUVRAS Louis	Physique Electricité
Mlle GAUTHERON	Chimie biologique	PICARD Claude	Mathématiques
MATHIEU	Mécanique des Fluides	SCHMITT Roger	Physique MPC

Maître de Conférences adjoint

M. PIERRON Chimie

Secrétaire Principal Honoraire

M. ROUX

Conseiller Administratif

M. BURNET



1 - INTRODUCTION.

1-1 - LA NOTION DE RENOUVELLEMENT ALEATOIRE

Les problèmes que nous abordons ici sont ceux que pose l'exploitation d'un parc complexe, constitué d'éléments initialement identiques, quand il s'avère que la durée de ces éléments est une grandeur aléatoire.

Ce type de problème se rencontre dans des domaines aussi différents que la gestion de la main d'oeuvre (assurer un effectif constant au moyen d'une main d'oeuvre mobile) ou l'exploitation industrielle (parc de camions, de machines-outils, etc. dont la vitesse d'usure diffère d'un élément à l'autre).

Le phénomène de vieillissement peut être, en fait, plus ou moins progressif et peut se traduire par une réduction des performances ou par une augmentation des dépenses d'entretien. Nous ne retenons pas ici cet aspect du problème, et nous ne nous intéressons qu'au fait même du remplacement, rendu nécessaire par la défaillance totale, la "mort" de l'élément, cette mort se présentant comme un phénomène brutal, imprévisible et irréversible ; nous excluons ainsi la possibilité de prolonger par une réparation la vie d'un élément défaillant. Nous écartons aussi toute possibilité de renouvellement dirigé, que ce soit le remplacement préventif individuel (l'euthanasie) ou les arrêts systématiques par campagnes.

Dans cette perspective la durée de vie est bien une grandeur aléatoire, sur laquelle on n'a pas d'autre information que son appartenance à une certaine population, au sens statistique du terme, et les défaillances se présentent comme des événements aléatoires, causes immédiates des renouvellements, nombre pour nombre et au fur et à mesure. Ces renouvellements méritent bien ainsi le qualificatif d'aléatoire.

1-2 - INTERET TECHNIQUE ET ECONOMIQUE DE LA PREVISION DES DUREES

Il est d'un grand intérêt économique d'établir des prévisions de renouvellement précises, car elles permettent de fonder une politique d'approvisionnement qui soit rationnelle, c'est-à-dire qui évite les deux excès opposés : un approvisionnement insuffisant, dépassé par des défaillances imprévues, conduit à des pertes de production, alors qu'un approvisionnement pléthorique immobilise inutilement des capitaux dans les stocks. Pour faire des prévisions de renouvellement précises, il faut connaître la loi de probabilité des durées. Or si on peut la connaître pour un type d'équipement en service depuis long-

temps, il faut de toute façon se prémunir contre une modification de la qualité, hétérogénéité ou dérèglement ; un contrôle statistique est donc indispensable. Ce contrôle doit se muer en une véritable méthode d'estimation continue, quand on exploite un type d'équipement nouveau, pour en dégager le plus rapidement possible les caractéristiques et porter un jugement de valeur sur le nouveau lot, avant qu'il ait été épuisé. Les conséquences pratiques sont évidentes quand on songe à des équipements dont la durée est de l'ordre de plusieurs années ; il est précieux de pouvoir juger un lot, quand 30 % seulement de ses éléments sont morts, et ainsi de déceler à temps les conséquences fâcheuses d'une innovation ou de généraliser une modification positive. L'intérêt économique des méthodes que nous allons proposer se double donc d'un intérêt plus spécifiquement technique, car permettant de tirer plus vite la leçon des essais elles contribuent à accélérer le progrès technique.

1-3 - ROLE DE LA LOI DE GAUSS DANS LES PROBLEMES DE DUREES ALEATOIRES

Les problèmes de renouvellement aléatoire auxquels nous avons été confronté, comme exploitant, puis comme responsable d'un service technique central, sont ceux des cathodes des cellules d'électrolyse pour la production de l'aluminium. Nous avons été assez surpris au début de découvrir que leurs durées étaient sensiblement gaussiennes alors que nous nous attendions à une loi de probabilité de forme nettement dissymétrique. La figure 1 donne un exemple typique de la validité de la loi de Gauss pour représenter la répartition des durées de ces cathodes. Nous avons testé la normalité sur une quarantaine de lots différents représentant chacun de 20 à 150 cathodes. Les principes développés dans cette étude sont transposables à d'autres lois de probabilité que la loi de Gauss, mais on comprendra le rôle privilégié que nous lui avons donné ici, en particulier dans les exemples qui correspondent tous, disons-le, à des cas concrets. On rencontre d'ailleurs des durées gaussiennes dans bien d'autres domaines de la technique, les ampoules électriques entre autres (CHURCHMAN, GUPTA).

Si sur le plan théorique l'usage de la loi de Gauss pour représenter des durées qui sont des grandeurs essentiellement positives présente quelques difficultés, pour l'exécution pratique des calculs numériques au contraire, c'est une situation favorable que de pouvoir caractériser une population par deux paramètres seulement, le moyenne, m , et l'écart-type s .

1-4 - PLAN DE L'ETUDE

Un premier chapitre est consacré, sous le titre de "mathématiques du renouvellement", au mécanisme des renouvellements aléatoires successifs ; il montre ce que devient au fur et à mesure du temps, et en probabilité, la descendance d'un élément neuf à l'origine.

Le deuxième chapitre indique comment calculer le nombre probable d'éléments à remplacer sur un certain laps de temps, comment en déduire des approvisionnements "rationnels" et comment enfin contrôler les réalisations.

Dans les deux premiers chapitres la loi de probabilité des durées est supposée connue. Le troisième chapitre est consacré au contraire à estimer la durée probable d'un nouveau lot, au fur et à mesure de son utilisation.

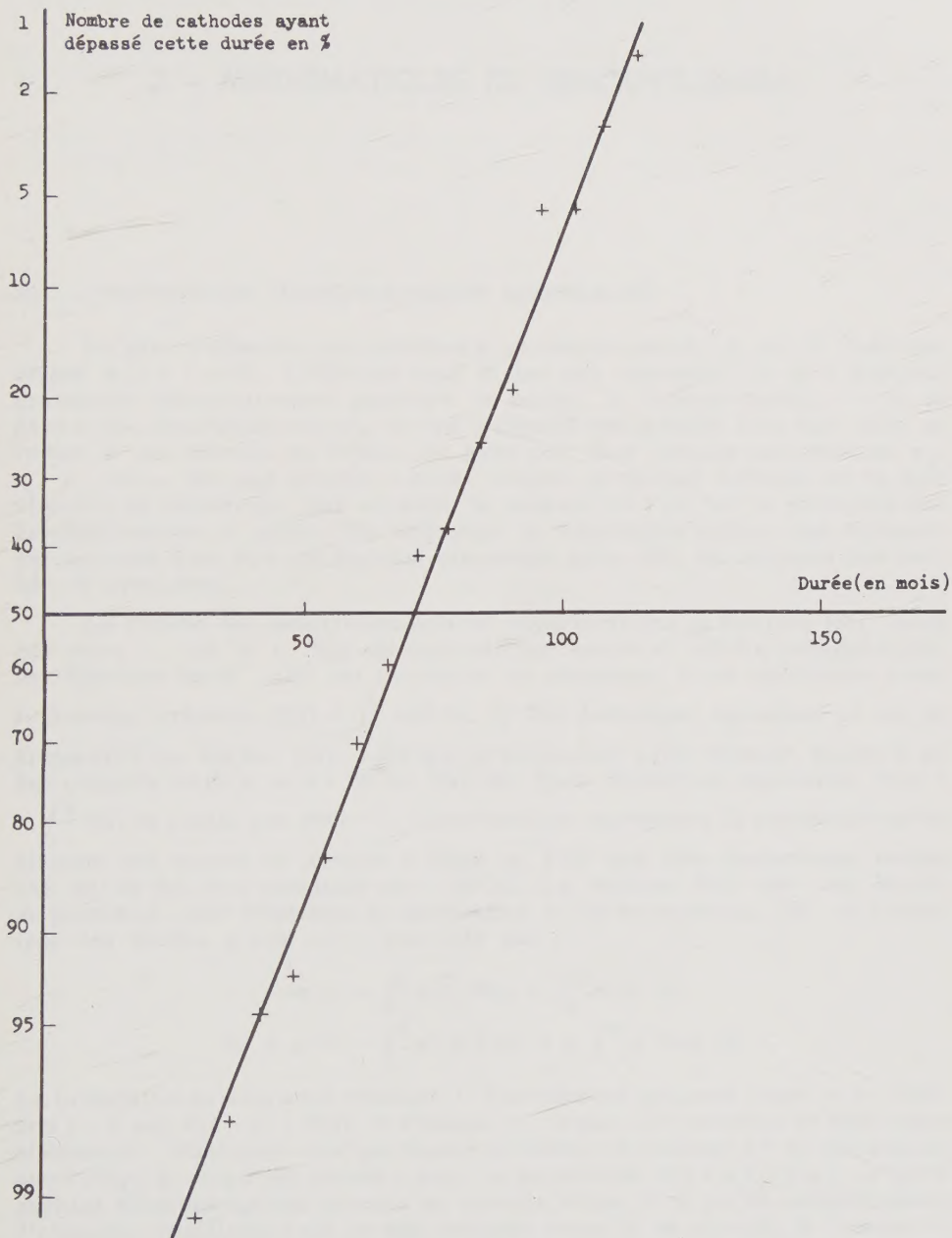


Fig. 1



Digitized by the Internet Archive
in 2026

2 — MATHÉMATIQUES DU RENOUVELLEMENT

2-1 - PROPRIÉTÉS MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Un parc d'éléments est constitué à un instant donné, t , de N individus d'âges x_i ($1 \leq i \leq N$). L'effectif total N est une constante ; x et t sont des grandeurs essentiellement positives ou nulles. À l'instant initial, $t = 0$, le parc a une répartition connue. Si tout l'effectif est installé à la fois, elle se réduit à une fonction de Dirac. Le parc peut être installé par tranches n_1 , n_2 , n_3 , etc.. On peut prendre comme origine un instant différent de la date effective de démarrage, par exemple le moment où l'on fait la prévision des renouvellements à venir. En définitive la répartition initiale des éléments par âge peut donc être une fonction quelconque mais elle est toujours une donnée du problème.

Le rythme des renouvellements est représenté par la fonction $h(t)$, telle que entre $t - dx$ et t , $h(t) dx$ éléments sont morts et ont été remplacés par des éléments neufs ; $h(t)$ est l'inconnue du problème. Nous utiliserons aussi la fonction intégrale $H(t) = \int_0^t h(t) dt$. Il faut introduire également la loi de probabilité des durées $f(x)$, telle que la probabilité qu'un élément meure à un âge compris entre x et $x + dx$ est $f(x) dx$. Nous utiliserons également $F(x) = \int_x^\infty f(x) dx$; telle que $F(0) = 1$. Cette fonction représente la probabilité qu'un élément soit encore en service à l'âge x . $F(x)$ peut être discontinue, auquel cas $f(x) dx$ doit être remplacé par $-dF(x)$. La fonction $F(x)$ est une donnée du problème ; elle détermine en particulier la durée moyenne, m , et l'écart type des durées s ; m et s sont tels que :

$$m = - \int_0^\infty x dF(x) = \int_0^\infty F(x) dx$$

$$m^2 + s^2 = - \int_0^\infty x^2 dF(x) = 2 \int_0^\infty x F(x) dx$$

La probabilité de service à l'instant t d'un élément qui avait l'âge a à l'instant $t = 0$ est $F(a + t) / F(a)$. À l'instant t , le parc est constitué de deux types d'éléments : d'une part ceux qui étaient en service à l'instant $t = 0$, qui avaient alors l'âge a_i et qui ont survécu avec la probabilité $F(t + a_i) / F(a_i)$, d'autre part les éléments qui ont été mis en service entre 0 et t , en remplacement d'éléments détaillants ; ont un âge compris entre x et $x + dx$, à l'instant t , les éléments mis en service entre l'instant $t - x - dx$ et l'instant $t - x$, soit $h(t - x) dx$, dont il ne reste que la fraction $F(x)$, donc le nombre

$$h(t - x) F(x) dx \quad (\text{pour } x \leq t)$$

Dans ces conditions la loi de conservation de l'effectif N du parc s'écrit :

$$N = \int_0^t h(t-x) F(x) dx + \sum_{i=1}^n F(t+a_i) / F(a_i) \quad (1)$$

Cette équation permet de calculer le rythme des renouvellements $h(t)$ à partir de la répartition initiale du parc et de la loi de répartition des durées $F(x)$.

L'équation (1) admet une solution particulière stationnaire telle que le rythme des renouvellements est constant, indépendant de t . Si en effet

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F(t+a_i) / F(a_i) &= \frac{N}{m} \int_0^{+\infty} F(x) dx = \frac{N}{m} \left[\int_0^{\infty} F(x) dx - \int_0^t F(x) dx \right] = \\ &= N - \frac{N}{m} \int_0^t F(x) dx \end{aligned}$$

l'équation (1) s'écrit

$$N = \int_0^t h(t-x) F(x) dx + N - \frac{N}{m} \int_0^t F(x) dx$$

Le rythme des renouvellements $h(t)$ est bien constant et égal à N/m .

Le parc stationnaire a ses éléments répartis proportionnellement à la probabilité de dépasser l'âge x : cette répartition est stable, c'est-à-dire que si elle se rencontre une fois elle se prolonge indéfiniment ; nous montrerons plus loin que tout parc évolue vers l'état stationnaire, plus ou moins lentement il est vrai.

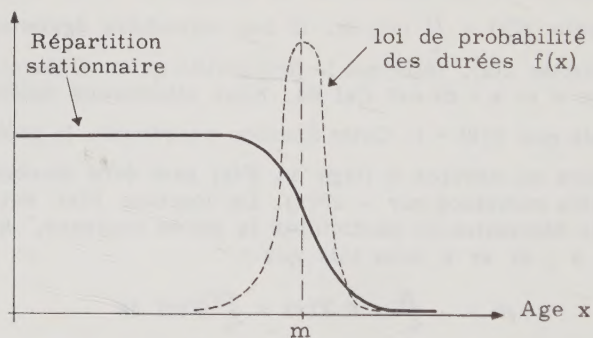


Fig. 2

2-2 - RESOLUTION DE L'EQUATION INTEGRALE

Pour résoudre l'équation (1) nous allons utiliser la transformation de Laplace et introduire les deux fonctions suivantes :

$$K(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx$$

image de la loi de probabilité des durées $f(x)$.

$$g(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} h(t) dt$$

image du rythme, inconnu, des renouvellements $h(t)$.

La transformée de $F(x)$ est $1/p - K(p)/p$ et celle de l'intégrale $\int_0^t h(t-x) F(x) dx$, se calcule facilement comme étant égale à $g(p)/p [1 - K(p)]$.

La transformée de $F(t + a_i) / F(a_i)$ n'a une expression simple que pour un élément neuf pour $t = 0$.

Si $a = 0$ en effet, $F(t + a) / F(a)$ est égal à $F(t)$ et sa transformée est $1/p - K(p)/p$.

Si donc tous les éléments sont neufs à $t = 0$, ce qui est le cas le plus fréquent, l'équation intégrale s'écrit :

$$N/p = g(p)/p [1 - K(p)] + N/p [1 - K(p)]$$

On en déduit :

$$g(p) = \frac{N K(p)}{1 - K(p)} \quad (2)$$

Le problème est dans ce cas théoriquement résolu, puisqu'à partir de la donnée de la loi de probabilité des durées $f(x)$, dont se déduisent $F(x)$ et $K(p)$, on sait calculer $g(p)$ par l'équation (2). Il n'y a plus qu'à inverser $g(p)$ pour connaître $h(t)$ et en déduire toutes les autres fonctions intéressantes : nombre cumulé d'unités à renouveler entre 0 et t , état probable du parc à l'instant t , âge moyen du parc à l'instant t , durée moyenne des unités mourant à l'instant t , etc.

La transformée de $F(t + a) / F(a)$ n'est malheureusement pas aussi simple quand l'âge à l'origine a n'est pas nul. Ecrivons $F(t + a) / F(a)$ sous la forme $1 - [F(a) - F(t + a)] / F(a)$ et considérons la transformée de $[F(a) - F(t + a)] / F(a)$

$$r(p, a) = \int_0^{\infty} e^{-pt} [F(a) - F(t + a)] / F(a) dt$$

L'équation intégrale s'écrit donc :

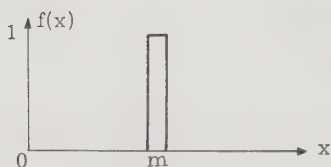
$$N/p = g(p)/p [1 - K(p)] + \sum_{i=1}^n [1/p - r(p, a_i)]$$

d'où se déduit

$$g(p) = \frac{p \sum_{i=1}^n r(p, a_i)}{1 - K(p)} \quad (3)$$

Pour $a = 0$ on retrouve évidemment la formule (2), car $r(p, 0) = K(p)/p$.

La formule (3) s'applique en particulier au cas où les durées sont certaines. Si $s = 0$, $f(x)$ se réduit à une distribution de Dirac et $F(x)$ vaut 1 pour $x < m$ et 0 ailleurs (figure 3).

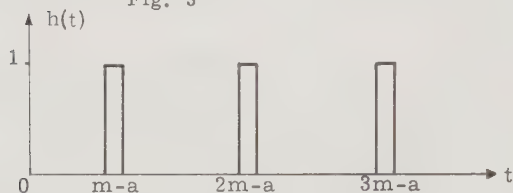


$$K(p) = e^{-pm}$$



$$(1 - K(p))/p = (1 - e^{-pm}) / p$$

Fig. 3



$$g(p) = \frac{e^{-p(m-a)}}{1 - e^{-pm}}$$

Fig. 4

La transformée de $f(x)$ est

$$K(p) = e^{-pm}$$

On en déduit

$$g(p) = \frac{\sum_{i=1}^n e^{-p(m-a_i)}}{1 - e^{-pm}}$$

On vérifie facilement que $g(p) = \frac{e^{-p(m-a)}}{1 - e^{-pm}}$ est bien la transformée de la fonction impulsion $h(t)$ non nulle pour $t = m-a, 2m-a, 3m-a$, (figure 4).

2-3 - COMPORTEMENT A COURT TERME

Considérons d'abord les faibles valeurs de t ; on sait que $h(t)$ pour t tendant vers zéro se déduit de $g(p)$ pour p tendant vers l'infini.

Considérons les développements limités en $1/p$ de $r(p, a)$ et $K(p)$. Il se déduisent des développements limités en t de $[F(a) - F(t + a)] / F(a)$ et en x de $f(x)$; en faisant ensuite la transformation de Laplace, il vient :

$$\frac{F(a) - F(t + a)}{F(a)} = \frac{f(a) t + f'(a) t^2/2 + \dots}{F(a)}$$

$$r(p, a) = \frac{f(a) 1/p^2 + f'(a) 1/p^3 + \dots}{F(a)}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0) x + f''(0) x^2/2 + \dots$$

$$K(p) = f(0) 1/p + f'(0) 1/p^2 + f''(0) 1/p^3 + \dots$$

On en déduit

$$g(p) = \sum_{i=1}^n \frac{f(a_i) \frac{1}{p} + f'(a_i) \frac{1}{p^2} + \dots}{F(a_i) [1 - f(0)/p + \dots]}$$

Ceci confirme l'intuition que $h(t) \sim \sum_{i=1}^n f(a_i) / F(a_i)$ pour t petit.

On en conclut que le nombre cumulé, $H(t)$, des renouvellements à prévoir d'ici le temps t est, pour t petit, donné par la formule (4) :

$$H(t) = \sum_{i=1}^n \frac{F(a_i) - F(t + a_i)}{F(a_i)} \quad (4)$$

2-4 - INVERSION PAR LA METHODE DES RESIDUS

On inverse $g(p)$ et $g(p)/p$ par la méthode des résidus pour obtenir $h(t)$ et $H(t)$.

$$h(t) = \sum \text{Res } e^{pt} g(p)$$

$$H(t) = \sum \text{Res } e^{pt} g(p)/p$$

Considérons un seul élément d'âge a :

$$g(p) = \frac{p \cdot r(p, a)}{1 - K(p)} \quad \text{d'après (3)}$$

$$H(t) = \sum \text{Res } \frac{e^{pt} r(p, a)}{1 - K(p)}$$

Soit α un pôle de

$$\Phi(p) = \frac{e^{pt} r(p, a)}{1 - K(p)}$$

On sait que :

$$\text{Res}_{p=\alpha} [\Phi(p)] = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} [(p-\alpha)^m \Phi(p)]_{p=\alpha}$$

où m est l'ordre de multiplicité du pôle α

Exprimons $K(p)$ en fonction des moments de la répartition $f(x)$.

$$K(p) = 1 - p m_1 + p^2 \frac{m_2}{2!} + \dots + (-1)^i p^i \frac{m_i}{i!}$$

$$\text{où } m_i = \int_0^\infty x^i f(x) dx$$

$$m_1 = m$$

$$m_2 = m^2 + s^2$$

etc.

Nous pouvons également exprimer $r(p, a)$ sous une forme analogue en remarquant que c'est la transformée de l'intégrale de la fonction de répartition des probabilités de survie $= f(t + a) / F(a)$.

$$p \ r(p, a)$$

est donc une fonction caractéristique

$$p \ r(p, a) = 1 - p \ m_1(a) + p^2 \frac{m_2(a)}{2!}$$

où les $m_i(a)$ sont les moments de la répartition $f(t + a) / F(a)$

$$m_i(a) = \int_0^\infty t^i f(t + a) / F(a) \ dt$$

pour $a = 0$, on a $m_i(0) = m_i$ et $r(p, 0) = K(p)/p$

Retenons que

$$r(p, a) = \frac{1}{p} \left[1 - p \ m_1(a) + p^2 \frac{m_2(a)}{2!} + \dots + (-1)^i p^i \frac{m_i(a)}{i!} \right]$$

Finalement $\Phi(p)$ s'écrit :

$$\Phi(p) = \frac{e^{pt} \left[1 - p \ m_1(a) + p^2 \frac{m_2(a)}{2!} + \dots \right]}{p^2 \left[m_1 - p \frac{m_2}{2!} + \dots \right]}$$

$\Phi(p)$ a donc deux sortes de pôles :

1/ le pôle double $p = 0$

2/ les pôles imaginaires $p = \alpha$ tels que $K(\alpha) = 1$

Considérons d'abord le pôle $p = 0$

La formule des résidus donne pour $H(t)$ le terme suivant :

$$H_1(t) = \frac{d}{dp} \left[\frac{p^2 e^{pt} [1 - p \ m_1(a) + p^2 \ m_2(a)/2! + \dots]}{p^2 [m_1 - p \ m_2/2! + \dots]} \right]_{p=0} = \frac{t - m_1(a) + \frac{m_2}{2 m_1}}{m_1}$$

soit encore

$$H_1(t) = \frac{t}{m} + \frac{m^2 + s^2 - 2 \ m \ m(a)}{2 \ m^2}$$

C'est l'équation d'une droite de pente $1/m$. Son ordonnée à l'origine est, pour $a = 0$, $-\frac{m^2 - s^2}{2 \ m^2}$ qui est voisin de $-1/2$, et pour a infini, $\frac{m^2 + s^2}{2 \ m^2}$, voisin de $+1/2$; en effet $m(0) = m$ et $m(\infty) = 0$ (figure 5).

Pour un nombre N d'éléments d'âges a_i on trouverait évidemment :

$$H_1(t) = \frac{N \ t}{m} + N \frac{m^2 + s^2}{2 \ m^2} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m(a_i) \quad (5)$$

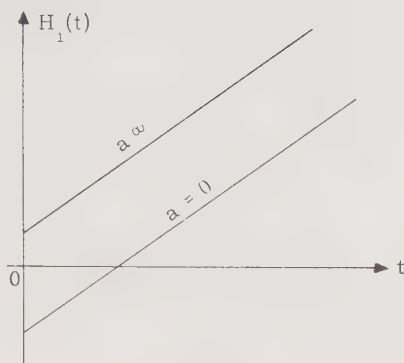


Fig. 5

Considérons maintenant les pôles imaginaires.

Ils sont tels, nous l'avons vu, que $K(\alpha) = 1$ c'est-à-dire que

$$K(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = 1$$

Les α qui sont solutions de cette équation sont caractéristiques de la loi de probabilité des durées $f(x)$. Chacun engendre un terme de $H(t)$; l'expression générale de ces termes est la suivante

$$\left| \frac{e^{pt} r(p, a) (p - \alpha)}{1 - K(p)} \right|_{p=\alpha} = - \frac{e^{at} r(\alpha, a)}{K'(\alpha)}$$

Ceci suppose que $K'(\alpha)$ ne soit pas nul, sinon le pôle α serait double. Nous n'insisterons pas sur la démonstration du fait que $K'(\alpha)$ n'est jamais nul, nous réservant de le faire remarquer dans chacun des exemples rencontrés.

Pour $a = 0$, on trouve ainsi

$$H_2(t) = - N \sum_{\alpha} e^{\alpha t} / K'(\alpha)$$

la sommation étant étendue à tous les pôles imaginaires α .

Pour a quelconque on trouve ainsi $H(t) = H_1(t) + H_2(t)$.

$$H(t) = \frac{N t}{m} + \frac{N(m^2 + s^2) - 2 m \sum_{i=1}^N m(a_i)}{2 m^2} - \sum_{\alpha} \frac{e^{\alpha t}}{K'(\alpha)} \sum_{i=1}^N r(\alpha, a_i) \quad (6)$$

$$h(t) = \frac{N}{m} - \sum_{\alpha} \frac{\alpha e^{\alpha t}}{K'(\alpha)} \sum_{i=1}^N r(\alpha, a_i) \quad (7)$$

Les formules (6) et (7) donnent la solution complète du problème posé. On reconnaît dans $H_1(t)$ et $h_1(t)$ les termes correspondant au régime stationnaire, asymptotique, et dans $H_2(t)$ et $h_2(t)$ des termes exponentiels, pseudo périodiques, tendant vers 0 quand t tend vers l'infini, comme nous allons le montrer.

2-5 - CONVERGENCE VERS LE REGIME STATIONNAIRE

Considérons le pôle imaginaire α et posons $\alpha = c + j \omega$. Nous allons, montrer que c est négatif, au sens strict.

En effet si $K(\alpha) = 1$, c'est que

$$K(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(x) dx = 1$$

autrement dit que c et ω sont tels que les 2 équations ci-dessous soient vérifiées simultanément

$$\int_0^{\infty} e^{-cx} \cos \omega x f(x) dx = 1$$

et

$$\int_0^{\infty} e^{-cx} \sin \omega x f(x) dx = 0$$

Nous éliminons la solution $\alpha = 0$ ($c = 0$, $\omega = 0$) qui correspond au pôle réel.

Rappelons que $\int_0^{\infty} f(x) dx = 1$ puisque $f(x)$ est une fonction de répartition.

On peut écrire :

$$\int_0^{\infty} e^{-cx} \cos \omega x f(x) dx < \int_0^{\infty} e^{-cx} f(x) dx$$

quand ω est différent de 0. Si c était positif, ou nul, cette intégrale serait inférieure à $\int_0^{\infty} f(x) dx = 1$. Il faut donc bien que c soit négatif. Ce n'est que si les durées étaient certaines et que $dF(x) = 1$ en face de chaque $x = m$, que c pourrait être nul. On aurait alors en effet :

$$\int_0^{\infty} e^{-cx} \cos \omega x f(x) dx = e^{-cm} \cos \omega m = 1$$

$$\int_0^{\infty} e^{-cx} \sin \omega x f(x) dx = e^{-cm} \sin \omega m = 0$$

dont la solution est $c = 0$, $\omega = 2 n \pi / m$. (fonction impulsion)

On peut donc affirmer que dès qu'il y a une dispersion des durées, c est négatif et $H_2(t)$ contient un terme exponentiel qui tend vers zéro quand t tend vers l'infini.

$H_2(t)$ est une somme de termes tels que :

$$- e^{c(t+a)} \frac{\cos \omega(t+a) + j \sin \omega(t+a)}{K'(c + j \omega)}$$

La comparaison des deux équations définissant c et ω montre d'ailleurs que si $\alpha = c + j \omega$ est solution, $\alpha = c - j \omega$ l'est aussi. En associant les deux pôles conjugués, on fait disparaître les termes imaginaires de $H(t)$. Notant c_n et ω_n les parties réelles et imaginaires pures des différents pôles imaginaires, nous pouvons écrire :

$$H_2(t) = \sum_n e^{c_n(t+a)} [\gamma_n \cos \omega_n(t+a) + \delta_n \sin \omega_n(t+a)]$$

où tous les c_n sont négatifs.

Ceci démontre bien la convergence vers l'état stationnaire, qui est générale hormis le cas où la dispersion des durées est nulle (durées certaines).

2-6 - ETUDE DE QUELQUES LOIS DE PROBABILITE

1/ Loi de Poisson

$$f(x) = \frac{e^{-x/m}}{m}$$

$$F(x) = e^{-x/m}$$

$$m_c = m^2 + s^2 = 2 m^2$$

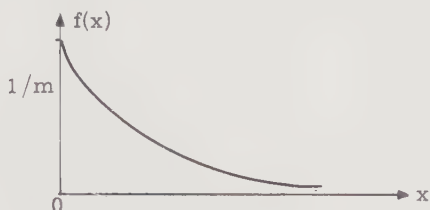


Fig. 6

$$m(a) = \int_0^{\infty} t \frac{f(t+a)}{F(a)} dt = m$$

L'espérance de survie est constante, indépendante de l'âge.

$$K(p) = 1/[1 + m p]$$

$K(p) = 1$ pour $p = 0$ seulement ; il n'y a pas de pôles imaginaires.

$H(t)$ se limite donc au terme asymptotique.

$$H(t) = \frac{t}{m} + \frac{m^2 + s^2 - 2 m m(a)}{2 m^2} = \frac{t}{m}$$

Le rythme des renouvellements est uniforme $h(t) = 1/m$.

2/ Durées certaines

Nous connaissons déjà la solution de ce cas (voir 2-2 et figure 4). Nous allons la retrouver par la méthode des résidus ; cet exercice servira de préparation à la résolution du cas suivant (durées gaussiennes).

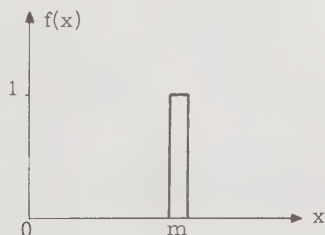


Fig. 7

On a ici :

$$K(p) = e^{-pm}$$

$$r(p, a) = e^{-p(m-a)}/p$$

$$m_1(a) = m - a$$

On en déduit le terme asymptotique :

$$H_1(t) = \frac{t}{m} + \frac{m^2 - 2m(m-a)}{2m^2} = \frac{t+a}{m} - 1/2$$

Considérons maintenant les termes périodiques.

Les pôles sont tels que $K(\alpha) = 1$, c'est-à-dire $e^{-\alpha m} = 1$. α vaut donc $\alpha = 2\pi n/m$ ($c = 0$ et $\omega = 2\pi n/m$).

Le terme de base est :

$$\frac{-e^{\alpha t} r(\alpha, a)}{K'(\alpha)} = \frac{-e^{\alpha t} e^{-\alpha(m-a)}}{e^{-\alpha m} (-\alpha m)}$$

qui s'écrit,

$$e^{\alpha(t+a)} / \alpha m$$

Associé avec le terme conjugué,

$$e^{-\alpha(t+a)} / -\alpha m$$

on trouve :

$$\frac{e^{\alpha(t+a)} - e^{-\alpha(t+a)}}{\alpha m} = \frac{1}{\pi n} \sin 2\pi n \left(\frac{t+a}{m} \right)$$

d'où

$$H_2(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2\pi n \left(\frac{t+a}{m} \right)$$

C'est une somme de fonctions périodiques de période m , non amorties. Etudions la entre $qm - a$ et $qm + m - a$ en posant $t = qm - a + um$; u est compris entre 0 et 1.

$H_2(t)$ devient

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin 2\pi n u = \frac{1}{2} - u = \frac{1}{2} - \frac{t - qm + a}{m} = q + \frac{1}{2} - \frac{t+a}{m}$$

Au total $H(t) = H_1(t) + H_2(t) = q$

C'est bien la fonction en escalier (figure 8).

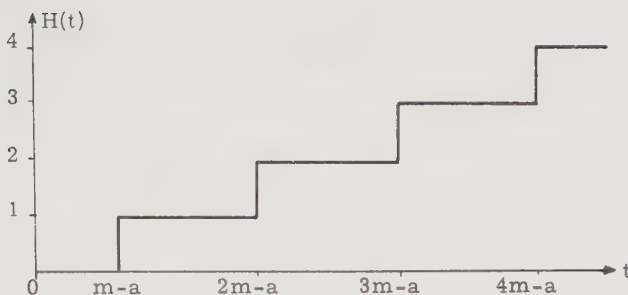


Fig. 8

3/ Durée gaussiennes

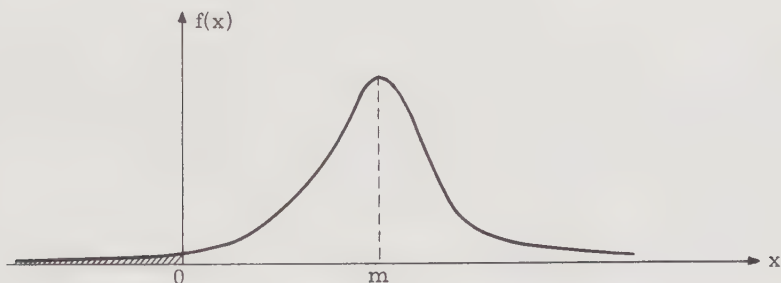


Fig. 9

Les durées négatives n'ayant pas de sens, il faut en principe utiliser la loi de Gauss tronquée :

$$f(x) = \frac{e^{-(x-m)^2/2s^2}}{\sqrt{2\pi} s G(-m/s)}$$

où $G(y)$ représente l'intégrale de Galton

$$\int_y^\infty \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du$$

Comme G tend très rapidement vers 1 quand y tend vers $-\infty$, en limitant notre propos aux valeurs de la dispersion s/m assez petites, nous pouvons négliger le terme $1 - G(-m/s)$ et utiliser pratiquement la formule de la loi de Gauss complète.

Dans ces conditions :

$$f(x) = \frac{e^{-(x-m)^2/2s^2}}{\sqrt{2\pi} s}$$

$$K(p) = e^{-mp+s^2 p^2/2}$$

Les pôles sont tels que

$$-m\alpha + s^2 \alpha^2/2 = 2\pi n j$$

ce qui, au 3^e ordre près en s , donne

$$\alpha = \frac{-2\pi^2 s^2 n^2}{m^3} - \frac{2\pi n j}{m}$$

Tous calculs faits et pour un élément d'âge $a = 0$, on trouve :

$$H(t) = \frac{t}{m} + \frac{s^2}{2m^2} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-2\pi^2 s^2 n^2 t}{m^3}} \left[\frac{1}{\pi n} \sin \left(2\pi \frac{nt}{m} \right) + \frac{s^2}{m^2} \cos \left(2\pi \frac{nt}{m} \right) \right] \quad (8)$$

$$h(f) = \frac{1}{m} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-2\pi^2 s^2 n^2 t}{m^3}} \left[\frac{2}{m} \cos \left(2\pi \frac{nt}{m} \right) - \frac{4\pi s^2 n}{m^3} \sin \left(2\pi \frac{nt}{m} \right) \right] \quad (9)$$

Pour $s = 0$ on retrouve évidemment pour $H(t)$ la fonction en escalier du deuxième exemple et pour $h(t)$ la fonction impulsion. Par contre dès que s est différent de 0, le terme exponentiel intervient pour produire la convergence. Elle est d'autant plus rapide que s est plus grand. On peut noter que les termes périodiques ont pour période m .

Pour a différent de zéro, on obtient de même

$$H(t) = \frac{t}{m} + \frac{m^2 + s^2 - 2m m(a)}{2m^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{-2\pi^2 s^2 n^2 (t+a)}{m^3}}}{F(a)} \left[\frac{1}{\pi n} \sin 2\pi n \frac{(t+a)}{m} + \frac{s^2}{m^2} \cos 2\pi n \frac{(t+a)}{m} \right] \quad (10)$$

D'un point de vue général, on attribuera un intérêt particulier aux formules (8) et (9) qui montrent comment s'effectue le passage des mathématiques discontinues de la certitude ($s = 0$) aux mathématiques continues.

2-7 - IDENTIFICATION DES GENERATIONS SUCCESSIVES

Nous nous limiterons dans ce paragraphe à l'étude des parcs dont toutes les unités ont été démarrées simultanément, c'est-à-dire dont tous les a_i sont nuls.

Reprenons la formule (2) et remplaçons $\frac{1}{1-K(p)}$ par son développement en série $1 + K(p) + [K(p)]^2 + \dots$

Il vient :

$$g(p) = N \sum_{n=1}^{\infty} [K(p)]^n$$

Considérons les termes tels que $[K(p)]^n$. Nous avons déjà vu que $K(p)$ s'exprime simplement en fonction des moments m_j de la distribution des durées. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} [K(p)]^n &= \left[1 - p m_1 + p^2 \frac{m_2}{2!} + \dots \right]^n = \\ &= \left[1 - p (n m_1) + \frac{p^2}{2!} [n m_2 + n(n-1) m_1^2] + \dots \right] \\ [K(p)]^n &= \left[1 - p(n m) + \frac{p^2}{2} (n^2 m^2 + n s^2) + \dots \right] \end{aligned}$$

ce qui est la transformée d'une distribution de moyenne $n m$ et d'écart-type $s \sqrt{n}$.

Au facteur N près, $h(t)$ apparaît ainsi comme la somme de distributions de probabilité correspondant aux générations successives; $n = 1$ représente les éléments initiaux, $n = 2$ ceux qui assurent la première vague des renouvellements, $n = 3$ la deuxième, etc..

Ce résultat peut être l'objet d'une démonstration plus intuitive et plus directe. Raisonnons sur une seule unité installée ; $N = 1$.

Par définition la fonction $h(t)$ dt n'est pas autre chose que la somme des probabilités élémentaires que meure entre t et $t + dt$ l'élément initial, ou l'élément de la deuxième, ou de la troisième génération, etc. Le moment où meurt l'élément initial est une grandeur aléatoire de moyenne m et d'écart-type s ; soit t_1 ce moment, il est égal à la durée d_1 de l'élément.

Le moment t_2 où meurt l'élément de la deuxième génération est la somme de deux durées aléatoires d_1 et d_2 , qui sont chacune des aléatoires de moyenne m et d'écart-type s . $t_2 = d_1 + d_2$ a pour moyenne $2 m$ et pour écart-type $s \sqrt{2}$.

Le raisonnement se généralise et le moment t_n où meurt l'élément de la n^e génération est un aléatoire de moyenne $n m$ et d'écart-type $s \sqrt{n}$.

Appelons $f_n(t)$ dt la probabilité que l'élément de la n^e génération meure entre t et $t + dt$. $h(t)$ qui est par définition, le nombre probable d'élément qui mourront entre t et $t + dt$ parmi la descendance de l'unique élément initial, est donc égal à :

$$h(t) = \sum_n f_n(t)$$

La figure 10 montre schématiquement comment les choses se passent.

Si nous admettons que $f(x)$ est une distribution de Gauss, nous pouvons donner l'expression exacte de $h(t)$ sous la forme de l'équation (11).

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(t-nm)^2/2ns^2}}{s \sqrt{2 \pi n}} \quad (11)$$

De même

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - G\left(\frac{t - n m}{s \sqrt{n}}\right) \right]$$

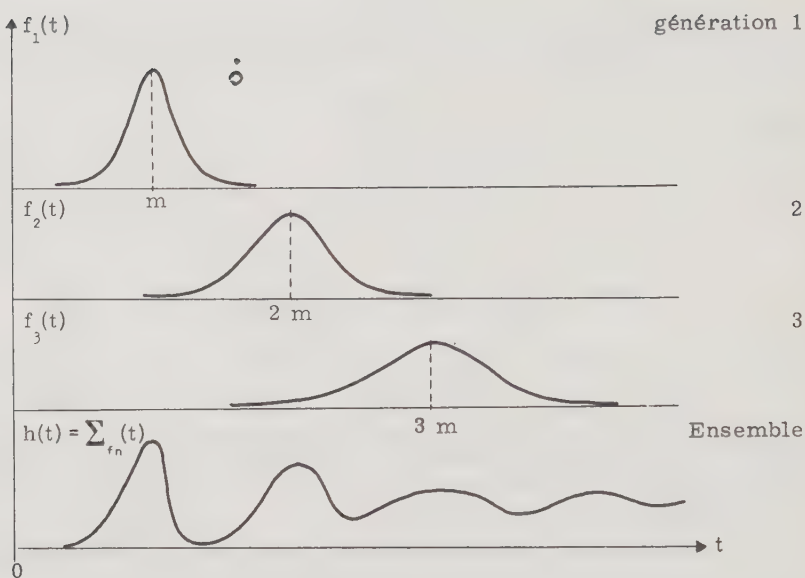


Fig. 10

On doit remarquer que même si les durées individuelles ne sont pas gaussiennes, le fait que pour obtenir l'instant de la mort des éléments de la n° génération il ait fallu additionner n durées élémentaires, garantit, en vertu du théorème de LIAPOUNOFF, que l'instant t_n de cette mort tend à suivre une loi de Gauss quand n tend vers l'infini.

Nous avons pu faire calculer par un ordinateur électronique les valeurs de la fonction $h(t)$ exprimée en coordonnées réduites.

Les figures 11, 12, 13, 14 et 15 illustrent la plus ou moins grande rapidité de l'amortissement des oscillations de $h(t)$ autour de la valeur stationnaire $1/m$. Pour une dispersion $s/m = 0,05$ les oscillations ne s'amortissent qu'avec une très grande lenteur ; par contre pour $s/m = 0,25$ il suffit de deux ou trois générations pour les rendre négligeables.

Cette présentation graphique rend visuellement sensible le passage des mathématiques du discontinu aux mathématiques des probabilités. Si tous les éléments avaient la même durée m , $h(t)$ se réduirait à une série d'impulsions de hauteur 1 en face de chacun des instant $t = m, 2m$ etc, comme sur la figure 3. Quand la durée devient aléatoire, un foisonnement se produit qui va aboutir à une permanence statistique. Le passage d'un mode à l'autre de pensée est peut être plus apparent sur le graphique 16 où sont présentées les courbes de $H(t)$.

2-8 - COMPARAISON DES DIFFERENTES FORMULES DE PREVISION

A la lumière de ce qui précède, on distinguera trois cas-types :

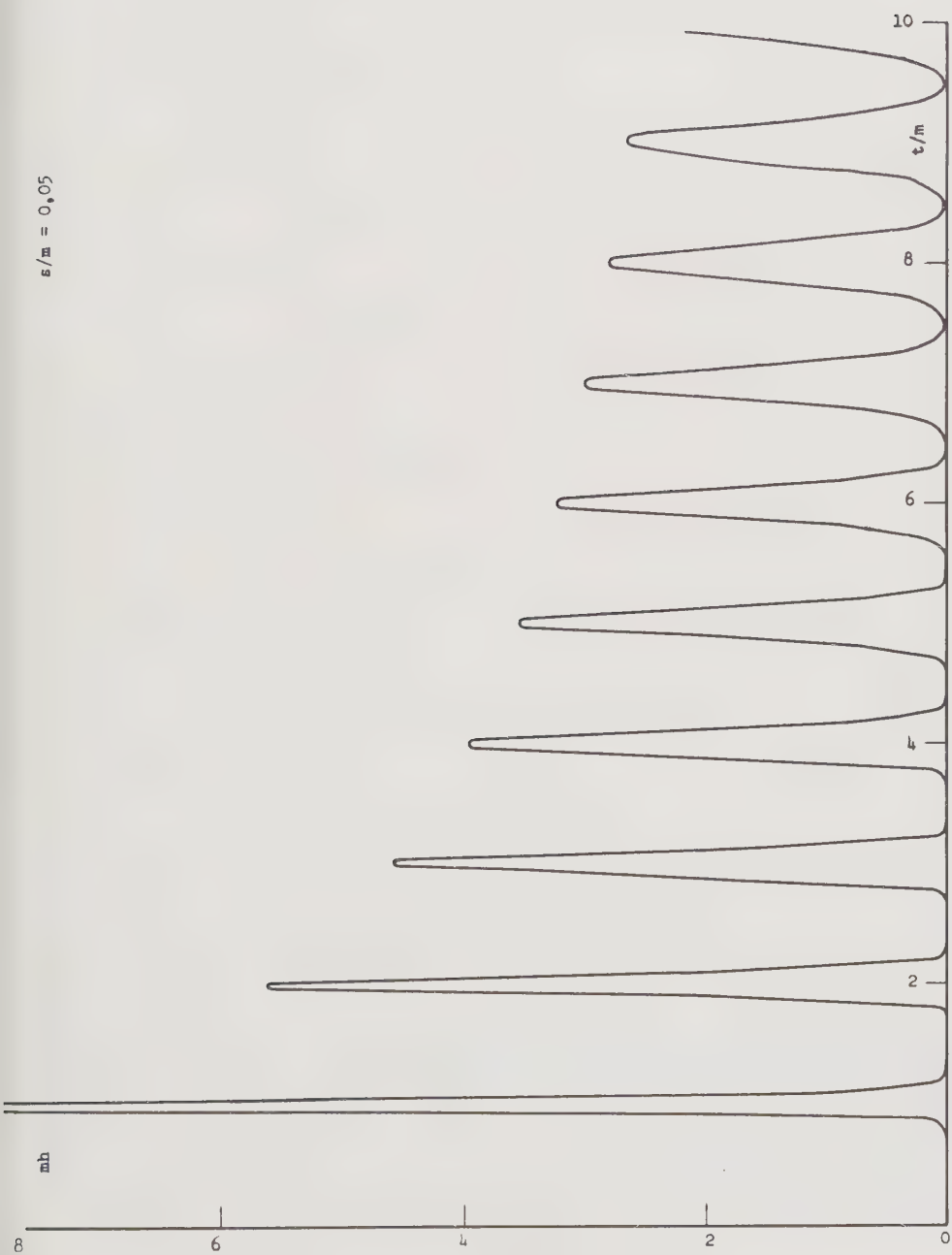


Fig. 11

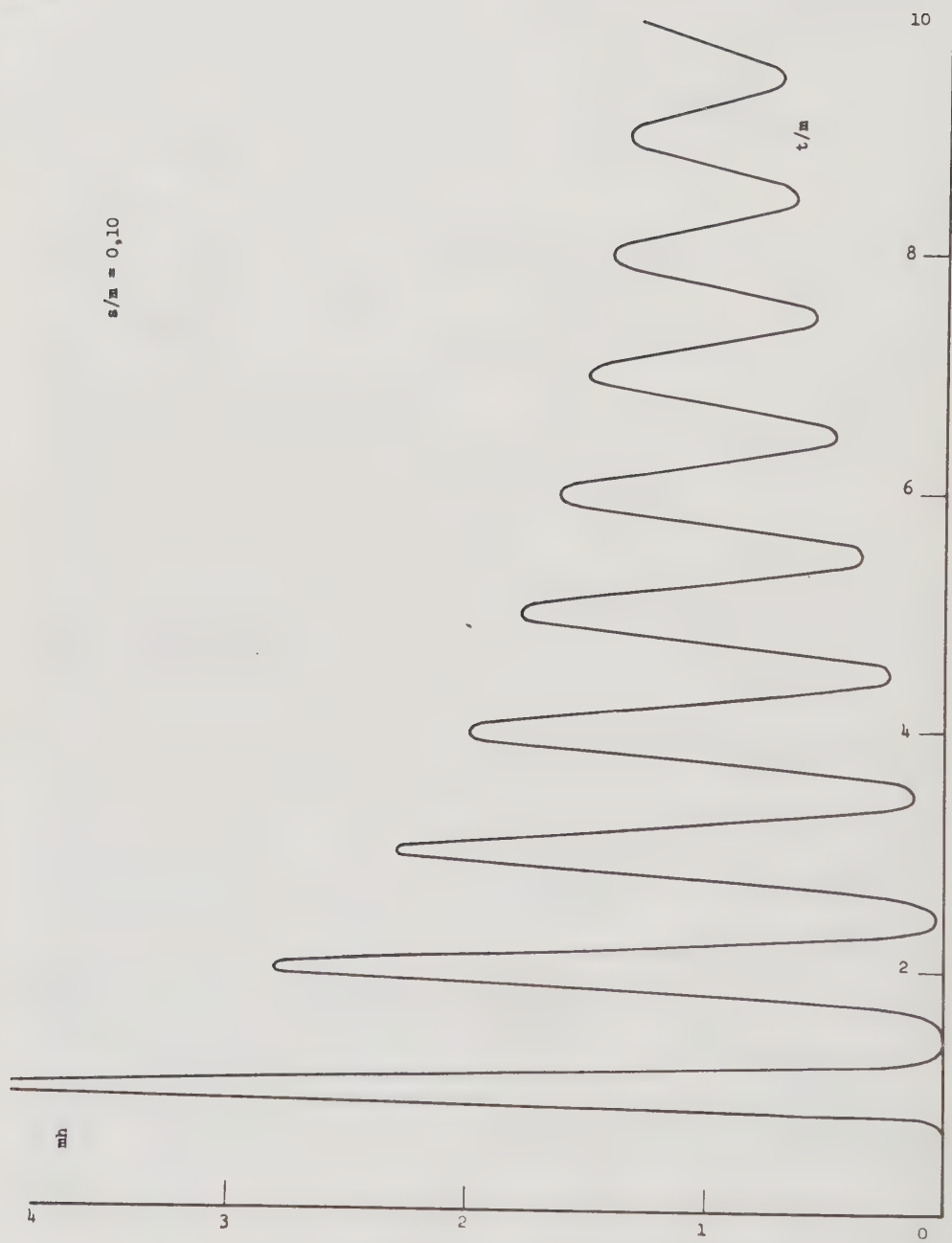


Fig. 12

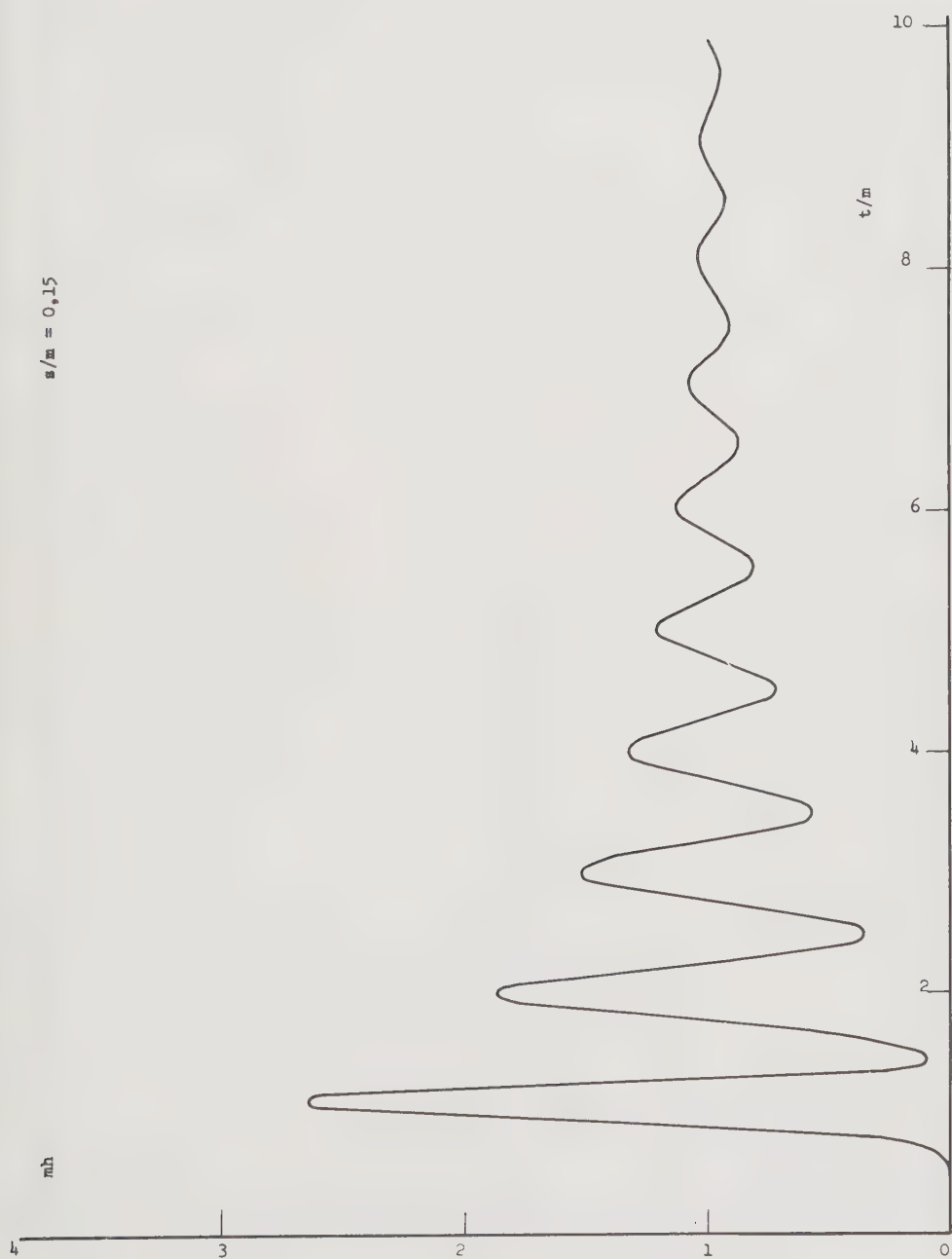


Fig. 13

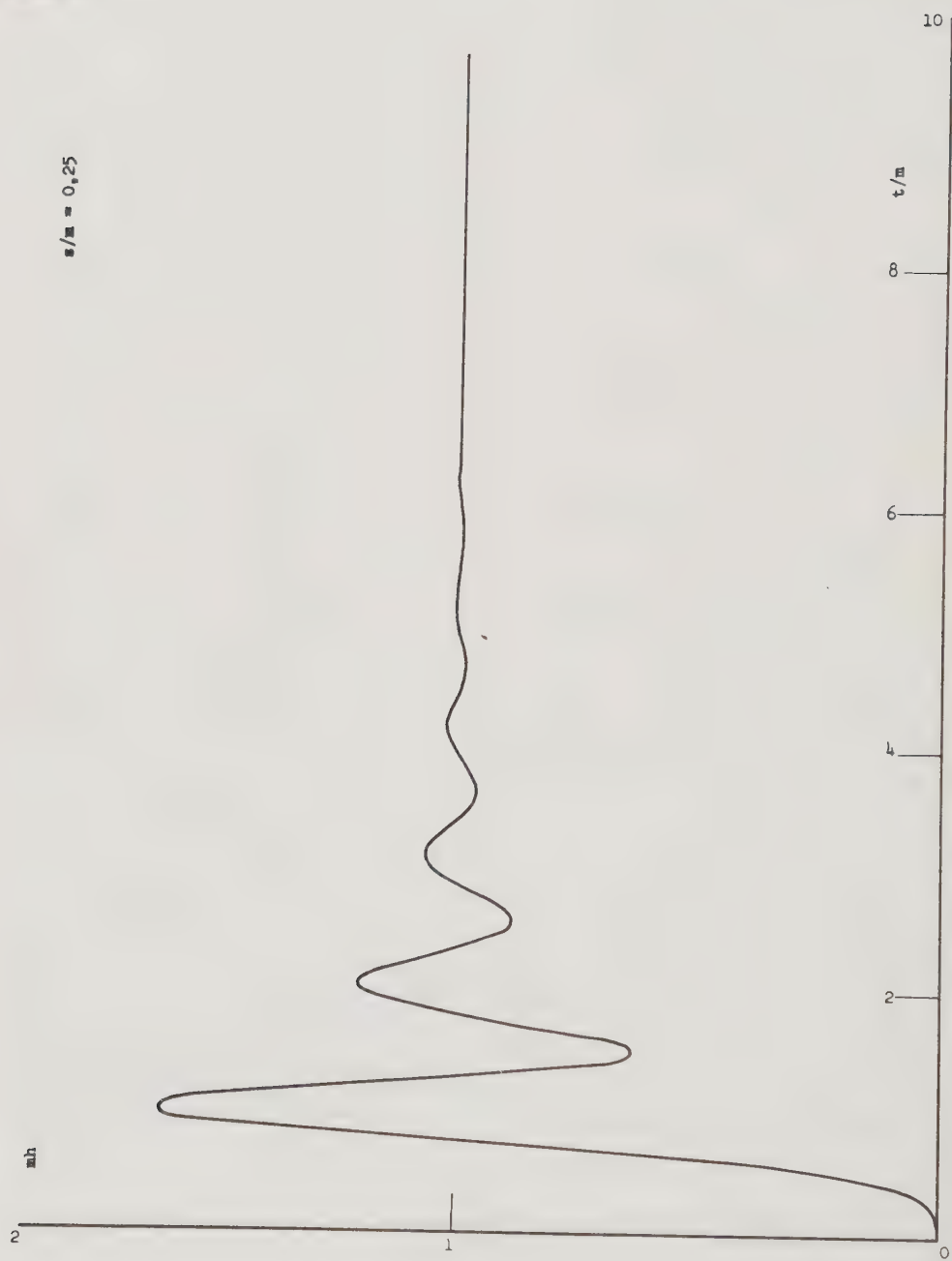


Fig. 14

$s/m = 0.35$

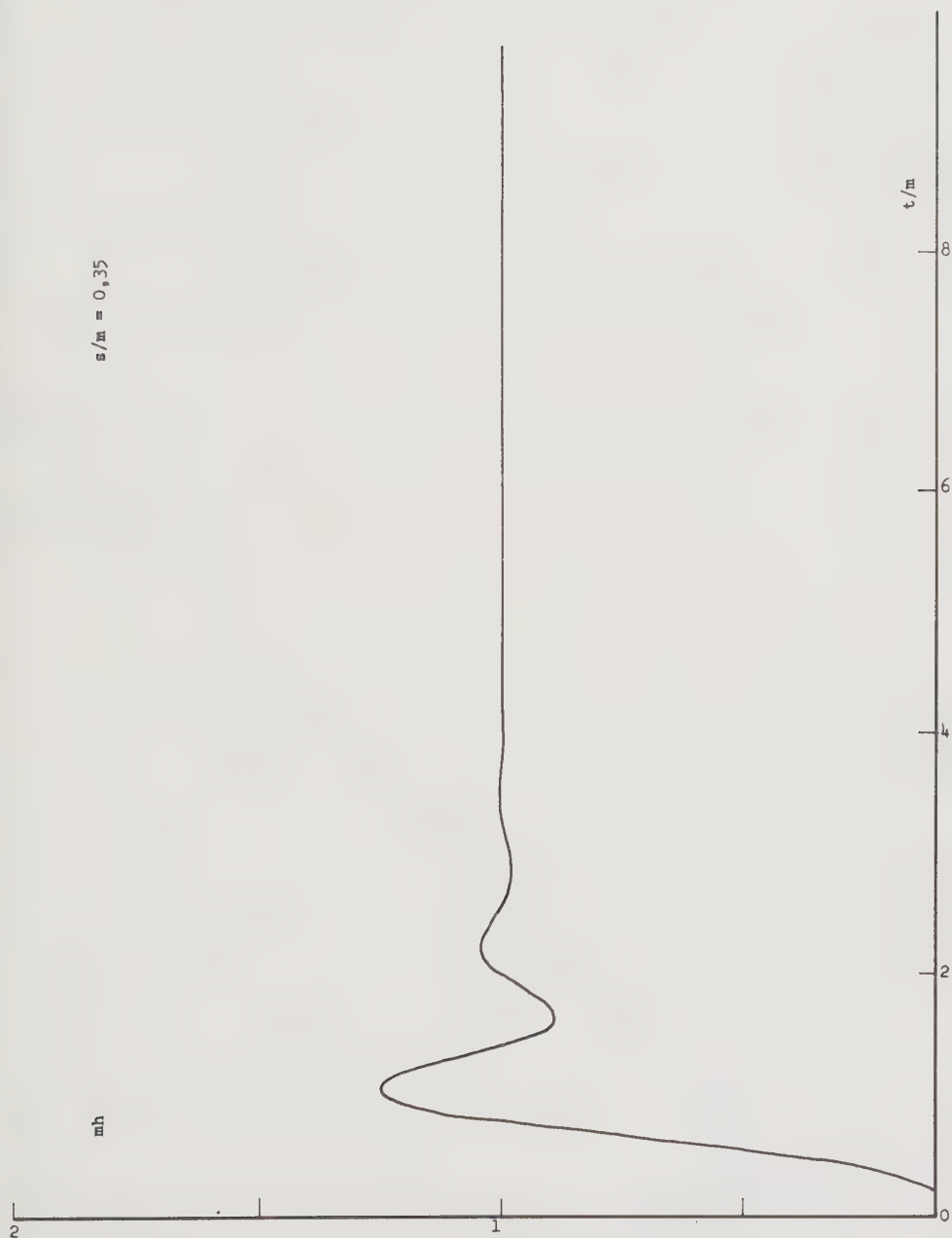


Fig. 15

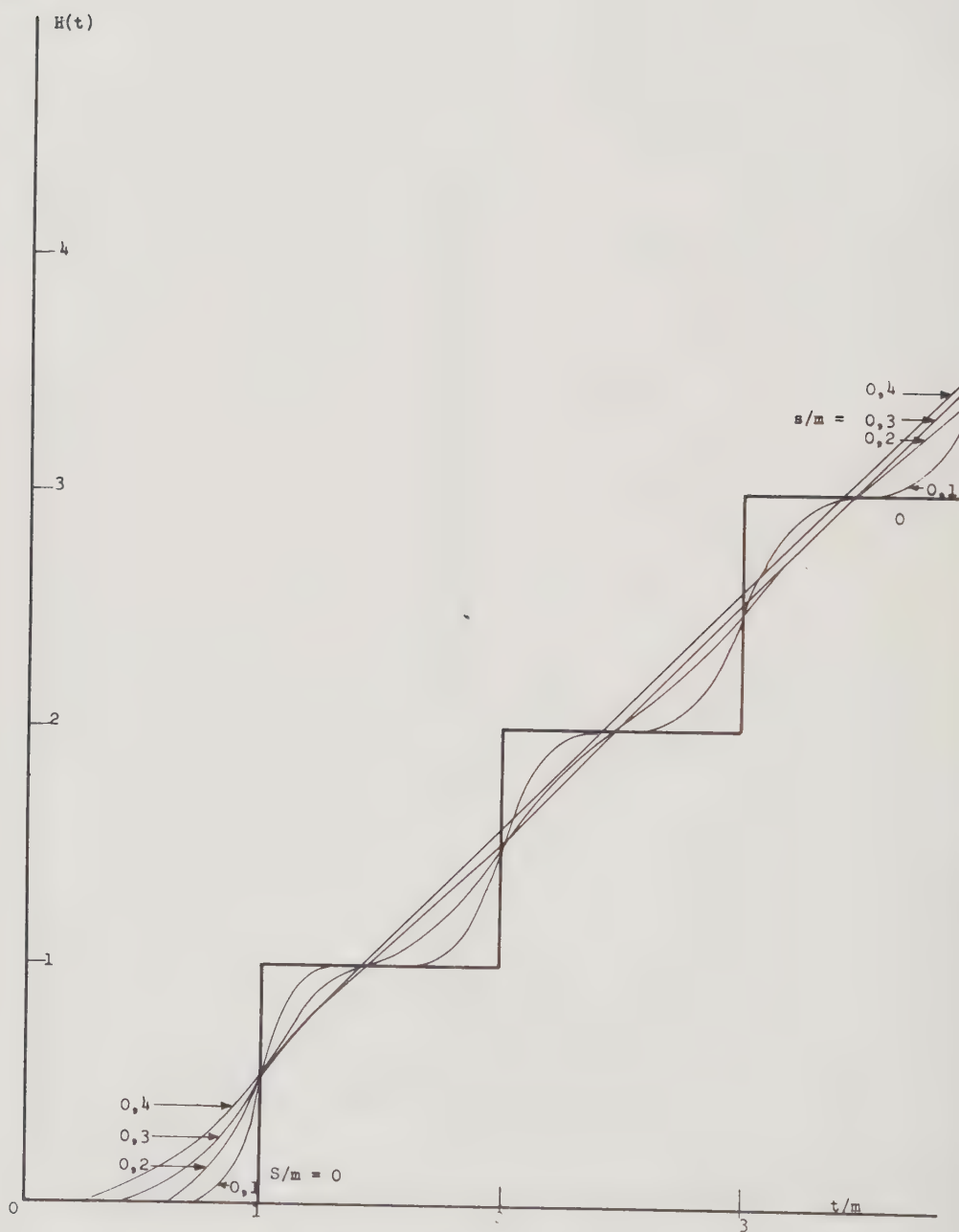


Fig. 16

1/ Prévisions à court terme

$$H(t) = \sum_{i=1}^N \frac{F(a_i) - F(t + a_i)}{F(a_i)} \quad \text{formule (4)}$$

2/ Prévisions à long terme

$$H(t) = \frac{Nt}{m} + N \frac{m^2 + s^2}{2 m^2} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m(a_i) \quad \text{formule (5)}$$

3/ Prévisions à moyen terme

Deux méthodes de calcul, soit par la méthode des résidus (formule (8)) soit par sommation des générations successives (formule (11)).

3 – GESTION D'UN PARC A RENOUVELLEMENT ALÉATOIRE

3-1 - PREVISION DES RENOUVELLEMENTS

Considérons les problèmes qui se posent au responsable de l'exploitation d'un parc constitué par exemple de 91 équipements qui, à un moment donné, se trouvent par le jeu des renouvellements successifs répartis en classes d'âge comme celles de la figure 17.

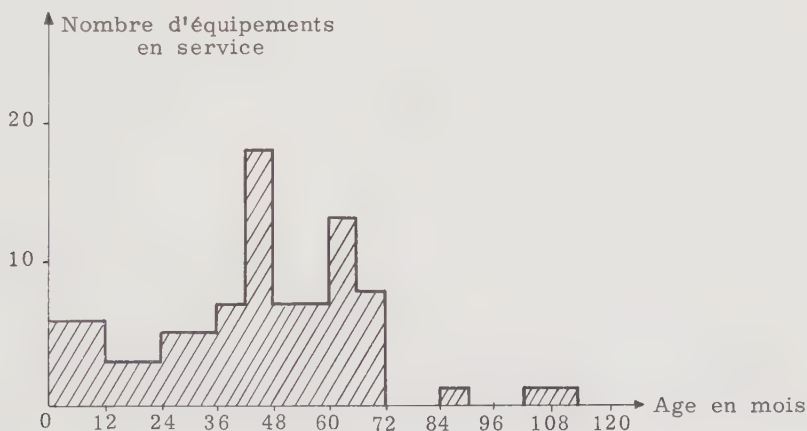


Fig. 17

Les délais d'approvisionnement étant de plusieurs mois, il convient d'établir un programme de commandes aussi rationnel que possible.

Le type d'équipement utilisé est, supposons le, resté inchangé depuis le premier démarrage de l'installation, il y a de cela une vingtaine d'années et l'étude des durées des éléments déjà morts a permis de tracer la droite de Henry de la figure 1 (page 5) qui montre que les durées suivent une loi de Gauss de moyenne 71 mois et d'écart-type 19 mois. Il est normal de faire l'hypothèse que les 91 équipements en service aujourd'hui appartiennent à la même population statistique, ce qui permet en utilisant les formules de prévision établies dans le premier chapitre, de calculer le nombre probable d'équipements qui devront être remplacés d'ici t mois, $H(t)$. Il faut noter

que d'autres hypothèses peuvent être faites, par exemple en se fondant sur les durées observées sur des équipements analogues dans d'autres circonstances ; ce serait le cas au tout début d'un nouveau type d'équipements. L'important est de garder présent à l'esprit que les résultats du calcul de $H(t)$ n'ont de sens que dans le cadre d'une certaine hypothèse, chaque hypothèse étant caractérisée par la donnée du couple (m, s) . Il sera donc prudent de contrôler, en cours de réalisation, si l'hypothèse faite au départ n'est pas en désaccord avec l'observation. Ce contrôle fera l'objet du dernier paragraphe de ce chapitre.

Pour l'instant voyons comment calculer $H(t)$. Comme le délai d'approvisionnement est faible devant la durée moyenne, on est dans le cadre des prévisions à court terme et on applique la formule (4). Le tableau 1 montre comment procéder pratiquement aux calculs. Les probabilités $F(a)$ sont lues sur la figure 1. On trace ainsi le graphique de la figure 18 qui indique les nombres probables de renouvellements à prévoir dans les prochains mois.

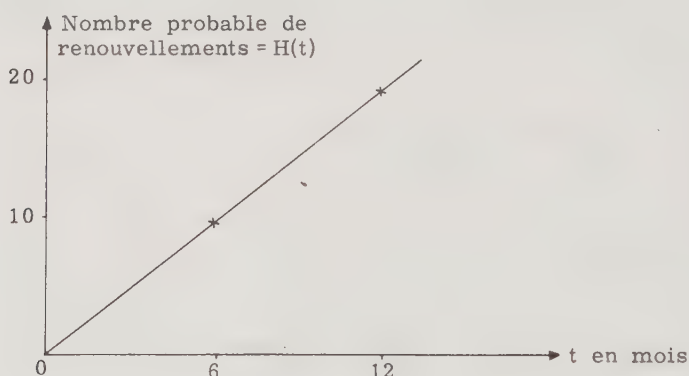


Fig. 18

Le rythme des renouvellements est sensiblement uniforme et égal à 1,55 unités par mois, mais on n'est pourtant pas dans le cas d'un parc stationnaire car le rythme serait de $\frac{N}{m} = \frac{91}{71} = 1,29$ unités par mois.

3-2 - DEFINITION DE LA POLITIQUE D'APPROVISIONNEMENT

Autant il est raisonnable d'utiliser pour une prévision budgétaire la valeur de $H(t)$ ainsi calculée, autant la considération de cette valeur probable - qui a donc grosso modo une chance sur deux d'être dépassée - serait dangereuse pour établir un programme d'approvisionnements. Une fois sur deux les matériaux de rechange ne seraient pas livrés au moment où l'équipement cesserait son service, d'où perte de production.

Supposons que les prévisions de renouvellements aient été faites, c'est-à-dire que l'on dispose de la courbe $H(t)$. Pour définir les approvisionnements, il faut connaître le délai d'approvisionnement ; appelons-le T . Si T est nul

TABLEAU 1

a (mois)	Nbre d'équipements d'âge n	Probabilité de dépasser a $F(a)$	Prévisions à 6 mois $F(a + 6)$	Probabilité de défaillance $p = 1 - \frac{F(a+6)}{F(a)}$	Nbre probable de défaillances $H(6) = np$	Variance des défaillances $np(1 - p)$
0 - 6	6	1	1	0	0	0
7 - 12	6	1	1	0	0	0
13 - 18	3	1	1	0	0	0
19 - 24	3	1	0,99	0,01	0,03	0,0297
25 - 30	5	0,99	0,98	0,01	0,05	0,0490
31 - 36	5	0,98	0,96	0,02	0,10	0,0960
37 - 42	7	0,96	0,92	0,04	0,28	0,2576
43 - 48	18	0,92	0,85	0,08	1,44	1,2240
49 - 54	7	0,85	0,77	0,09	0,63	0,4851
55 - 60	7	0,77	0,66	0,14	0,98	0,6468
61 - 66	13	0,66	0,54	0,18	2,34	1,2636
67 - 72	8	0,54	0,41	0,24	1,92	0,7872
73 - 78	0	0,41	0,30	0,27	0	0
79 - 84	0	0,30	0,20	0,33	0	0
85 - 90	1	0,20	0,12	0,40	0,40	0,0480
91 - 96	0	0,12	0,07	0,42	0	0
97 - 102	0	0,07	0,038	0,46	0	0
103 - 108	1	0,038	0,018	0,53	0,53	0,0095
109 - 114	1	0,018	0,007	0,61	0,61	0,0004
Total	91				9,31	4,8969

en effet, le problème ne se pose pas et on n'a qu'à enregistrer les défaillances successives et à se procurer au fur et à mesure les pièces de rechange qui sont, par définition, disponibles. En général T n'est pas nul ; la première conséquence en est qu'on est sans action sur ce qui va se passer entre $t = 0$ et $t = T$. Les approvisionnements de cette première période doivent avoir déjà été prévus. De même il est inutile de prévoir les approvisionnements pour $t > T$. Au total se dégage la notion d'une programmation dynamique des approvisionnements ; à chaque instant t on commande les approvisionnements supplémentaires nécessaires pour que la situation soit optimum à l'instant $t + T$ et ce faisant on tient compte de la totalité de l'information à l'instant t , c'est-à-dire d'une part des commandes déjà faites, qui seront livrées entre t et $t + T$, et de l'état réel du parc à l'instant t , celui-ci ayant évolué depuis la dernière mise au point.

Dans ces conditions, pour définir la politique d'approvisionnement optimum, il suffit de considérer ce que va se passer entre 0 et T, en plaçant l'origine des temps au moment où se pose le problème. Soit N l'effectif du parc et $n = H(t)$ le nombre probable de renouvellements. Quel est le nombre v des équipements qui auront du être approvisionnés d'ici T ?

Appelons A le coût du stockage et B le coût de la défaillance. A et B s'expriment en unités identiques, francs par unité d'équipement approvisionné et par unité de temps. A comprend évidemment l'intérêt de l'argent, le coût du magasinage, etc.

Si $K < v$ = stockage	coût $A(v - K)$
Si $K > v$ = perte de production	coût $B(K - v)$

Le coût probable de la politique d'approvisionnement v s'obtient en pondérant les coûts du stockage et de la perte de production par leurs probabilités respectives, soit $C(v)$:

$$C(v) = A \sum_{K=0}^{v-1} (v - K) p(K) + B \sum_{K=v+1}^N (K - v) p(K)$$

$$A \sum_{K=0}^{v_0-1} (v_0 - K) p(K) + B \sum_{K=v_0+1}^N (K - v_0) p(K) =$$

$$A \sum_{K=0}^{v_0} (v_0 + 1 - K) p(K) + B \sum_{K=v_0+2}^N (K - v_0 - 1) p(K)$$
$$A \sum_{K=0}^{v_0} p(K) = B \sum_{K=v_0+1}^N p(K)$$
$$\text{Prob}(K \leq v) = P(v) = \sum_{k=0}^v p(K)$$
$$A P(v_0) = B[1 - P(v_0)]$$
$$P(v_c) = B/[A + B] \quad (12)$$

3-3 - CAS D'UN PARC STATIONNAIRE

$$p(K) = \frac{e^{-NT/m}}{K!} \left(\frac{NT}{m}\right)^K$$

La probabilité $P(v)$ est donnée par

$$\sum_{K=0}^v \frac{e^{-NT/m}}{K!} \left(\frac{NT}{m}\right)^K$$

En égalant $P(v)$ à $B/A + B$ on définit les valeurs critiques de NT/m pour lesquelles l'approvisionnement doit passer de v à $v + 1$ (figure 20).

On calcule les valeurs de $\frac{NT}{m}$ en résolvant les équations du type (13):

$$\sum_{K=0}^v \frac{e^{-NT/m}}{K!} \left(\frac{NT}{m}\right)^K = B/[A + B] \quad (13)$$

Si le nombre escompté, $\frac{NT}{m}$ est inférieur ou égal à 18 on utilise une abaque de la loi de Poisson comme celle de la figure 19. Si NT/m est supérieur à 18, on utilise la loi de Gauss, limite de la loi de Poisson.

Prenons un exemple. Soit à tracer la courbe des approvisionnements en fonction de NT/m , pour NT/m , variant de 0 à 20, alors que le coût, B , de défaillance est 9 fois plus élevé que le coût A du stockage. Jusqu'à $NT/m = 18$, on utilise l'abaque de la figure 19, coupée par l'ordonnée $B/A + B = 0,9$. A partir de $NT/m = 18$, on observe que K suit une loi de Gauss de moyenne NT/m et d'écart-type $\sqrt{NT/m}$; pour avoir la probabilité $B/A + B = 90\%$, il faut que K soit supérieur à la moyenne de 1,28 écart-type, soit $v = \frac{NT}{m} + 1,28 \sqrt{NT/m}$.

La figure 20 montre comment a été tracée la courbe d'approvisionnement dans ce cas.

On y voit comment la courbe des approvisionnements s'écarte de la droite des renouvellements moyens, et ceci d'autant plus que le délai de livraison T est plus long.

De ce point de vue il est intéressant d'exprimer le coût C en fonction de v et de NT/m . Le calcul conduit à la formule :

$$C = [(A + B) P(v) - B] (v - NT/m) + [(A + B) p(v) - B p(N)] NT/m$$

où $p(v)$ et $P(v)$ sont respectivement les probabilités simple et cumulées de loi de Poisson de paramètre NT/m . Si N est assez grand, $p(N)$ est négligeable. On a représenté sur la figure 21 les courbes donnant C en fonction de NT/m pour différentes valeurs de v et pour $B/[A + B] = 0,9$. Elles permettent d'apprécier l'intérêt d'une politique d'approvisionnement optimum, en montrant combien le coût augmente vite quand on s'écarte de la valeur optimum $v = v_0$.

La figure 21 montre également comment le coût C augmente quand le délai d'approvisionnement T croît.

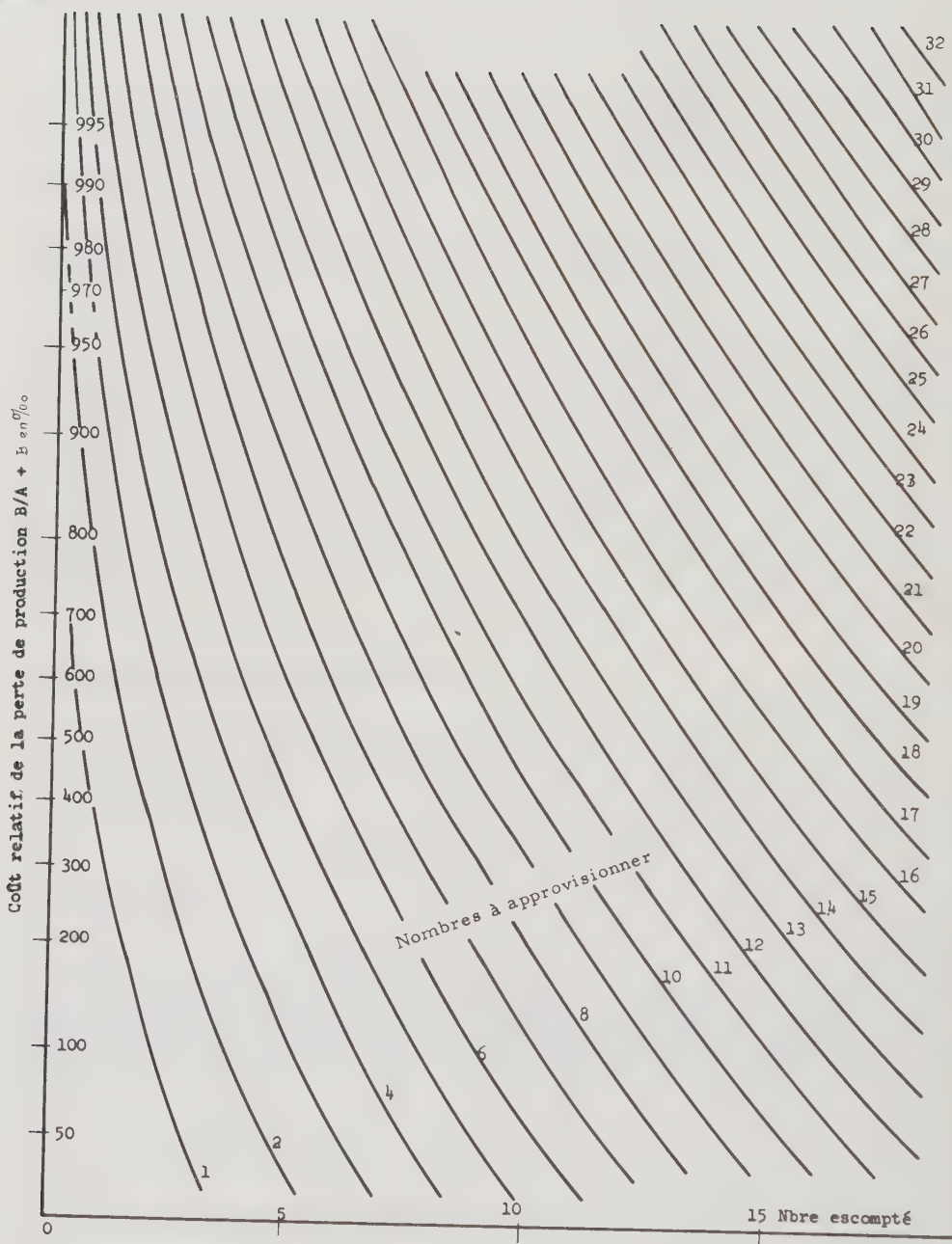


Fig. 19

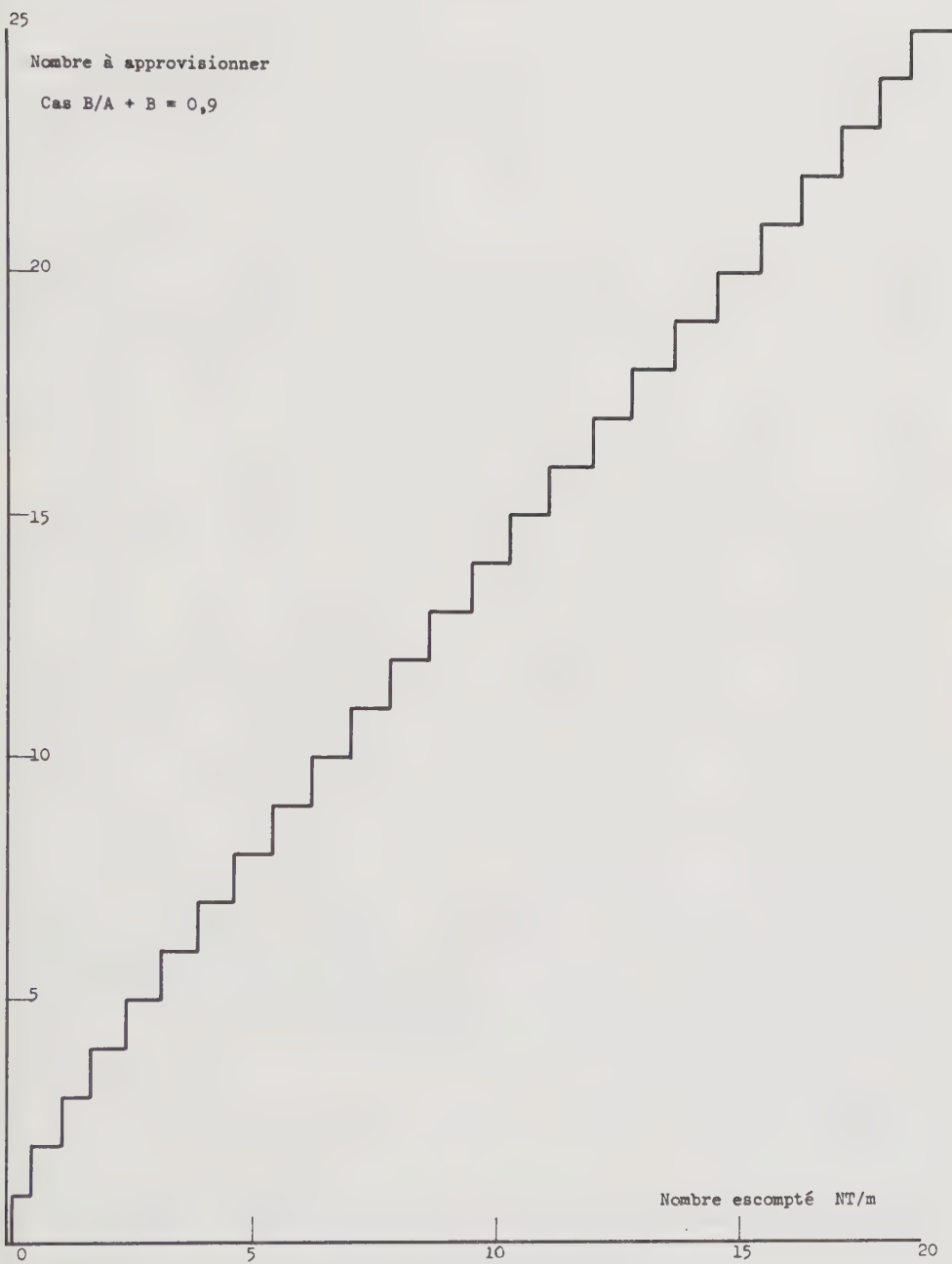


Fig. 20

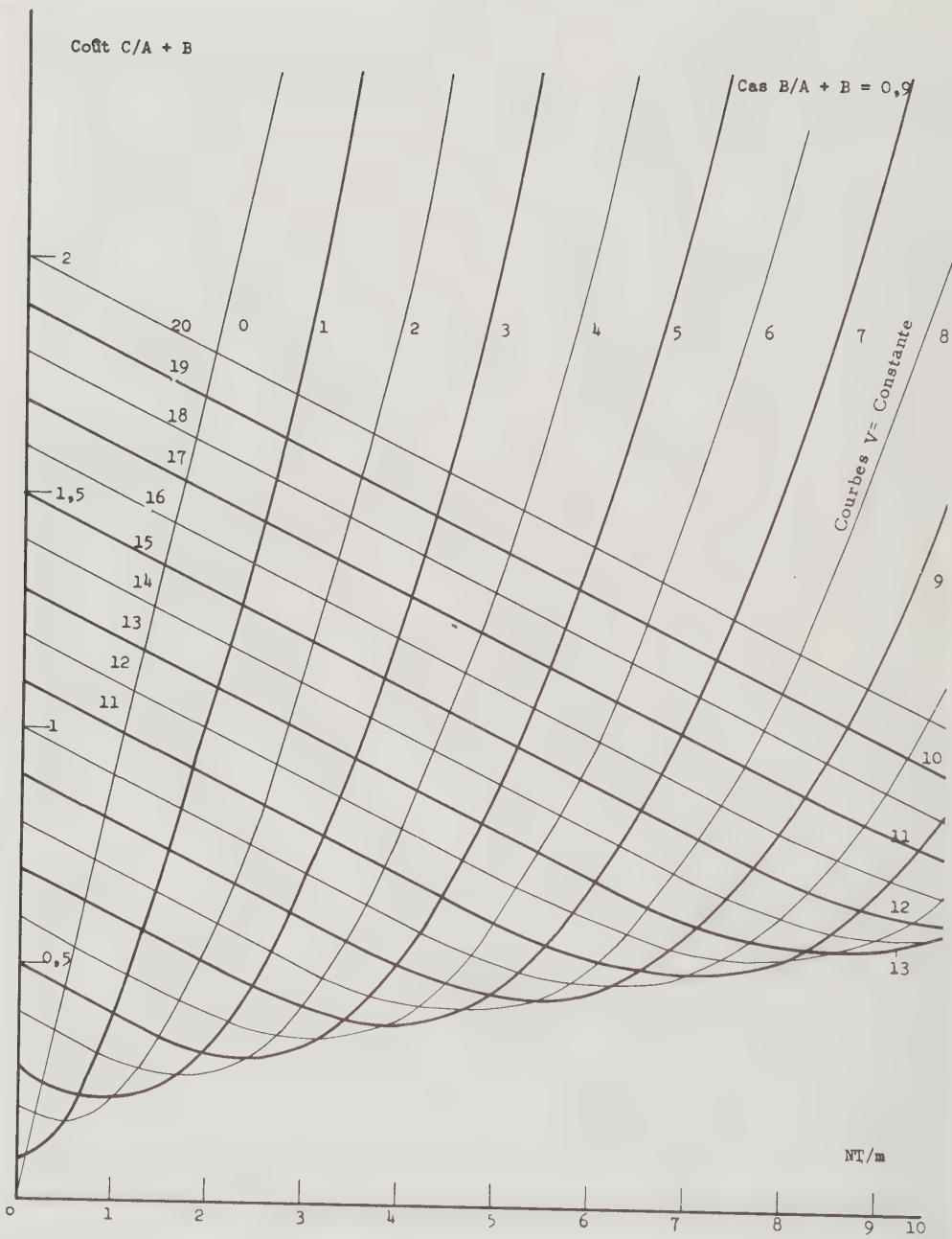


Fig. 21

3-4 - CAS D'UN PARC QUELCONQUE

3-4-1 - Parc neuf

Si tous les éléments installés ont la même probabilité, p , de défaillance, le calcul de $P(v)$ probabilité d'avoir de 0 à v éléments défaillants s'effectue de façon classique par la loi binomiale :

$$P(v) = \sum_{K=0}^v C_N^K p^K (1-p)^{N-K}$$

où p est évidemment égal à $H(T)/N$.

Suivant les valeurs de N et de $H(T)$ on utilisera soit la loi binomiale elle-même, soit son approximation par la loi de Gauss, soit son approximation par la loi de Poisson. Les domaines d'application respectifs des trois lois sont rappelés sur la figure 22.

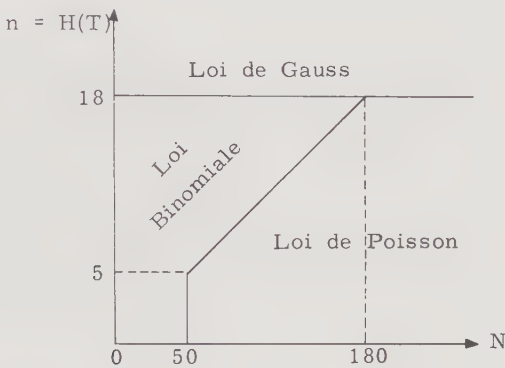


Fig. 22

Comme nous avons déjà rencontré dans le paragraphe 3-3 des exemples d'application de la loi de Gauss et de la loi de Poisson, nous ne donnerons ici qu'un exemple faisant appel à la loi binomiale. Soit à calculer les approvisionnements nécessaires quand le parc est $N = 20$ et le nombre probable de renouvellements de 2, et alors que $B/[A+B] = 0,9$. La table de la loi binomiale pour $p = 2/20 = 10\%$ et $N = 20$ donne pour $K = 3$ la probabilité cumulée 0,867 et pour $K = 4$, 0,9568. Il faut donc approvisionner $v = 4$ équipements (figure 23).

Insistons sur les rôles différents que joue la loi de Poisson dans ce paragraphe et dans le précédent. Dans le paragraphe 3-3 en effet, le processus est par lui-même poissonnien car l'événement de base est la survenance d'une défaillance quelconque dans l'intervalle t , $t + dt$ et cet événement a une probabilité élémentaire constante, infiniment petite et égale à $N dt/m$ puisque le rythme des renouvellements est uniforme. Dans le paragraphe 3-4, pour trouver des événements équiprobables il faut s'intéresser à la défaillance individuelle de l'un ou de l'autre des N équipements constituant le parc. Entre 0 et T , la probabilité de défaillance individuelle a une valeur finie et le processus est, dans son principe, binomial ; la loi de Poisson n'est utilisée qu'accidentellement comme une approximation commode pour certains calculs.

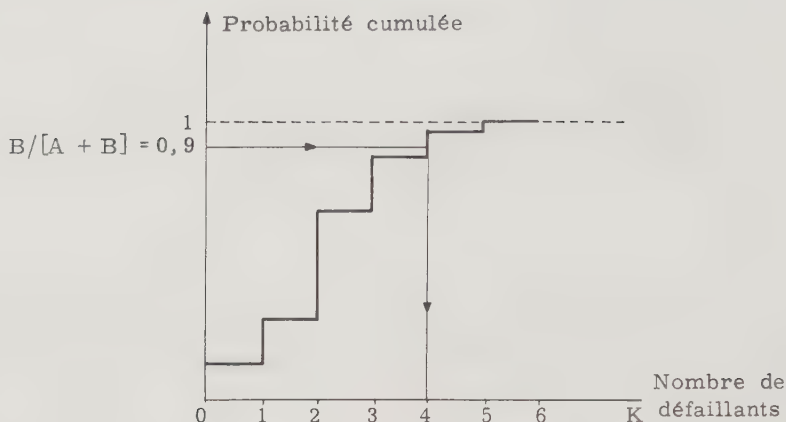


Fig. 23

3-4-2 - Parc hétérogène

Le calcul des approvisionnements dans le cas d'un parc quelconque nécessite en principe l'usage de la loi multinomiale puisque chacun des N éléments constituant le parc a une probabilité de défaillance individuelle, p , qui lui est propre. Encore que le calcul de la loi multinomiale soit facilité par les calculatrices modernes, on ne s'y résoudra qu'en dernier ressort.

Pratiquement on retombera souvent sur les deux cas typiques déjà rencontrés : rythme des renouvellements uniforme ou parc homogène. Pour les parcs franchement hétérogènes, constitués de N éléments ayant chacun des probabilités différentes, p_i , de défaillance, si le nombre N est assez grand on peut faire l'approximation gaussienne en tablant sur le fait que la moyenne est $\sum p_i$ et la variance $\sum p_i(1 - p_i)$.

Reprenons à titre d'exemple le parc de la figure 17 ; les probabilités individuelles de défaillance entre 0 et 6 mois ont été calculées sur le tableau 1 :

On trouve ainsi :

$$\sum p_i = 9,31 \text{ et } \sum p_i(1 - p_i) = 4,90$$

Si $B/[A+B] = 0,90$ l'approvisionnement doit être de $9,31 + 1,28 \sqrt{4,90} = 12,13$.

En définitive on n'aura à utiliser la loi multinomiale que dans le cas assez spécial d'un parc constitué d'un petit nombre d'éléments, d'âges très hétérogènes.

3-5 - CONTROLE DES DEFAILLANCES

Les paragraphes précédents ont montré comment on pouvait assurer au mieux les approvisionnements nécessaires aux remplacements des équipements défaillants ; mais cette méthode n'est évidemment efficace que si les dé-

faillances se produisent suivant la loi de probabilité des durées qui a servi à calculer les prévisions. Il est donc de saine gestion de contrôler les défaillances pour déceler à temps un dérèglement des durées qui rendrait caducs tous les calculs d'optimisation précédents, soit que les durées diminuant les approvisionnements deviennent insuffisants, soit qu'inversement les durées augmentant les stocks se gonflent inutilement.

Le problème est du domaine du contrôle de qualité classique ; il consiste à définir à l'avance, de part et d'autre de la courbe des défaillances prévues, $H(t)$, un domaine de confiance, à 95 % de chances par exemple, puis en cours de réalisation à pointer les défaillances au fur et à mesure qu'elles se produisent. Tant que la courbe empirique reste à l'intérieur du domaine de confiance, on considère que l'hypothèse (m, s) qui a servi à calculer $H(t)$ n'est pas contredite par les faits et les approvisionnements qui ont été calculés à l'aide de $H(t)$ restent satisfaisants, aux fluctuations statistiques près, bien entendu. Inversement si la courbe empirique sort du domaine de confiance, on considère que l'hypothèse (m, s) faite a priori est incorrecte et qu'il faut estimer la vraie moyenne et le vrai écart-type à partir des données empiriques ; ce sera l'objet du troisième chapitre.

La détermination pratique du domaine de confiance est classique ; l'emploi d'une abaque comme celle de la figure 25 est particulièrement commode. On peut ainsi compléter la courbe des renouvellements prévus, $H(t)$, par les deux courbes donnant la limite supérieure et la limite inférieure de contrôle. La figure 24 en donne un exemple, la courbe $H(t)$ étant celle de la figure 18. Ainsi pour $t = 6$ mois, $H(t) = 9,31$ pour $n = 91$; le pourcentage de défectueux est donc de $p = 10,2 \%$, auquel correspondent sur les courbes $n = 90$ les deux valeurs de $c/n = 4 \%$ et $c/n = 17 \%$; la limite inférieure est donc 3,6 et la limite supérieure 15,4.

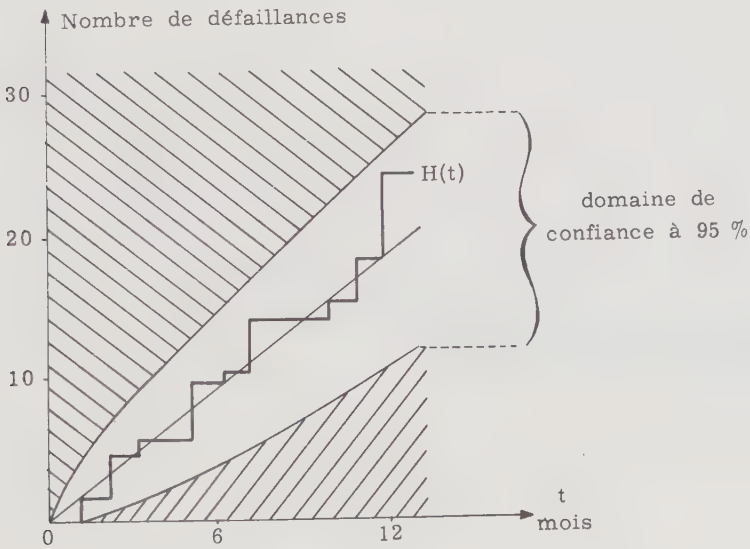


Fig. 24

ABaque de la LOI BINOMIALE

Probabilité 95 %

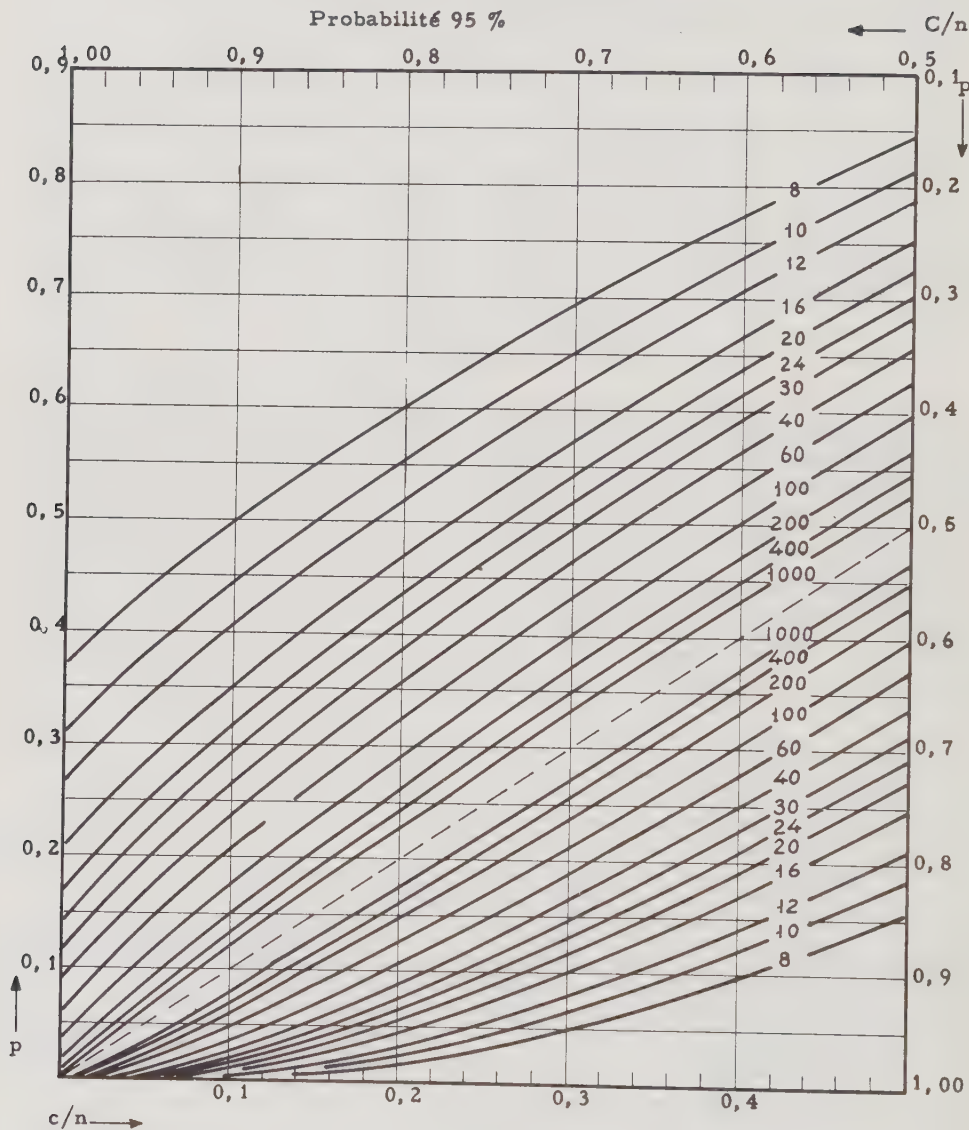


Fig. 25

Dans le cas d'un parc neuf, dont tous les éléments ont démarré en même temps, il est indiqué de contrôler les défaillances sur un graphique de Henry, comme celui de la figure 26. On y pointe les pourcentages cumulés de défaillances observées depuis le démarrage.

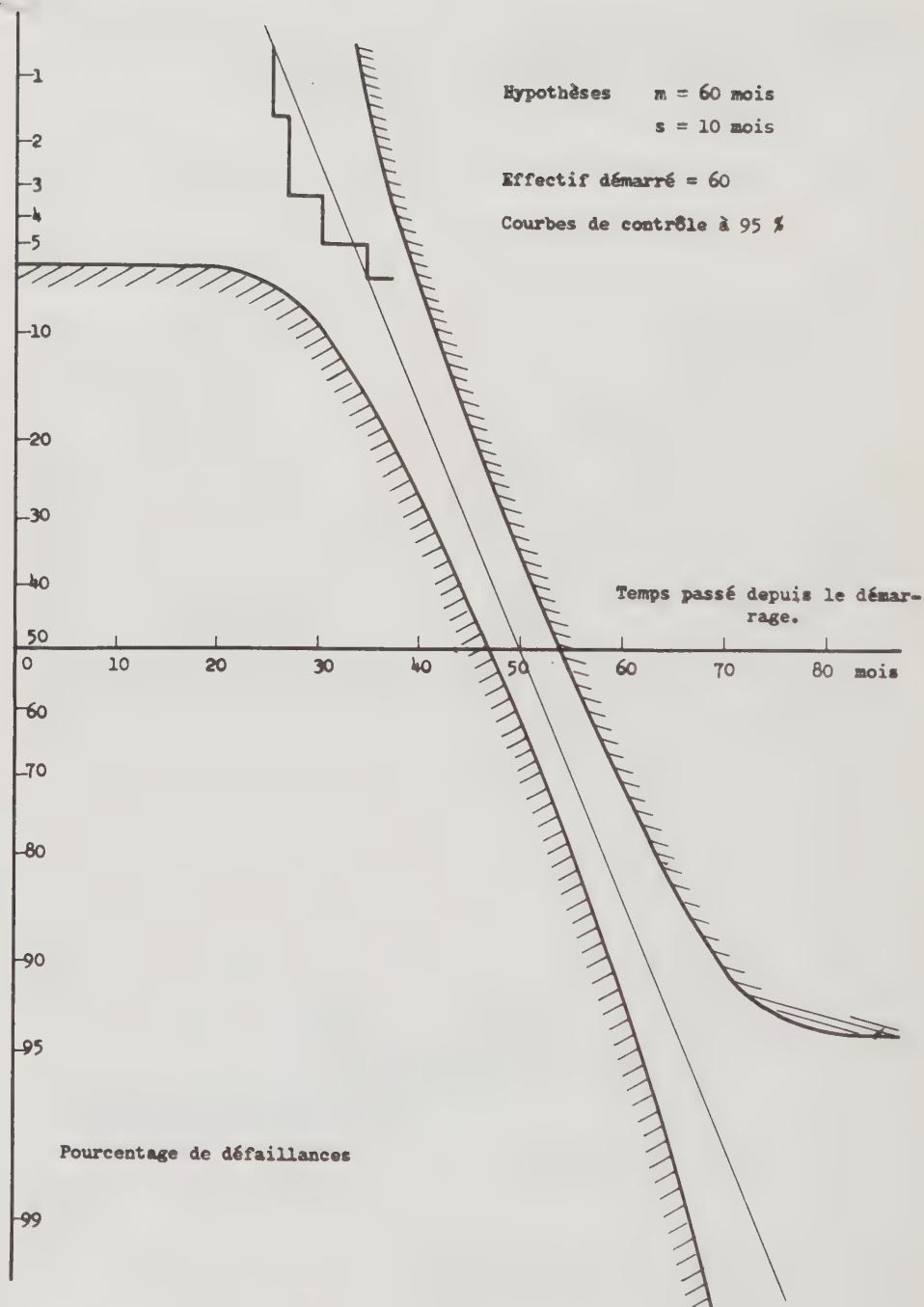


Fig. 26

4 – ESTIMATION DE LA LOI DE PROBABILITÉ DES DURÉES

4-1 - ESTIMATION DE LA PROBABILITE $F(x)$

Dans le chapitre précédent, en étudiant la gestion des approvisionnements nous avons mis en évidence l'intérêt, surtout économique, qu'il y avait à estimer la durée d'un type d'équipements le plus tôt possible après sa mise en service. D'un point de vue plus technique c'est également un problème important, car on pratique rarement pendant des dizaines d'années un renouvellement à l'identique, soit que les idées évoluant on apporte des modifications volontaires à la conception des équipements, soit que les fournisseurs n'assurant plus la fabrication de telle nuance de matériau les équipements renouvelés se trouvent modifiés, involontairement cette fois et même quelquefois à l'insu de l'utilisateur ; c'est ce que nous appelions un dérèglement au chapitre précédent. Dans tous les cas il est bon de connaître l'effet de ces modifications sur la durée. Sur une longue période un parc d'équipements à renouvellement aléatoire se présente donc comme une succession de lots, tous les équipements mis en place entre deux dates appartenant à un lot déterminé.

Le problème général peut s'exprimer comme suit :

A l'instant t où l'on pratique l'estimation de la loi de probabilité des durées, on dispose des informations suivantes :

Les N équipements constituant le lot ont été mis en place à des instants différents t_i ; ils ont des anciennetés $a_i = t - t_i$; a_i est une fonction de t , $a_i(t)$. On distingue dans N deux classes, celle des équipements qui sont déjà morts, à des instants t'_i et pour lesquels on peut calculer une durée $d_i = t'_i - t_i$ et celle des équipements en service à l'instant t dont on sait seulement que la durée sera supérieure à l'ancienneté : $d_i \geq a_i(t)$.

Si on classe les N équipements en fonction non plus du temps absolu, t , comme sur la figure 27, mais en fonction de l'ancienneté $a_i(t)$ on obtient la figure 28, où l'on a indiqué par un segment blanc la période où l'équipement était en service et par un segment noir la période où il était mort. Les équipements déjà morts sont représentés par un segment blanc de longueur d_i , suivi d'un segment noir de longueur $a_i(t) - d_i$; les équipements en service sont représentés par un seul rectangle, blanc, de longueur $a_i(t)$.

En comptant les segments blancs et noirs en face de l'ancienneté a , on a une estimation de la loi de probabilité des durées $F(x)$ pour $x = a$. En effet les segments blancs représentent les équipements dont la durée a dépassé x et les segments noirs les équipements morts qui avaient une ancienneté suffisante pour atteindre éventuellement l'âge x . La somme des deux nombres

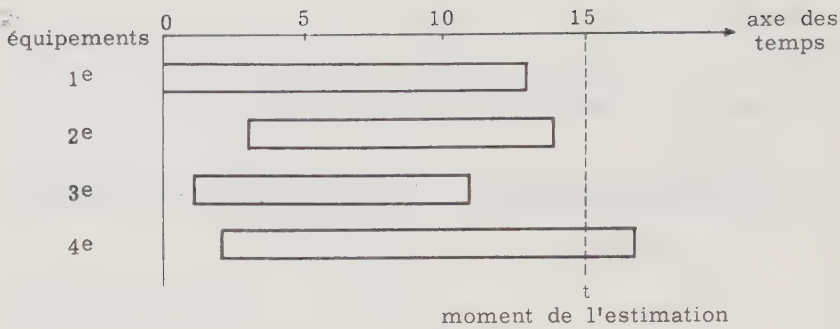


Fig. 27

de segments représente l'information totale disponible sur la durée x . A un moment, t , donné, cette information diminue le long de l'axe des x ; elle s'annule pour $x > t$; aucune estimation de $F(x)$ n'est possible pour $x > t$.

Le rapport blanc/blanc + noir est la fraction des équipements qui ont atteint la durée x parmi ceux qui ont une ancienneté au moins égale à x . Cette fraction tend en probabilité vers $F(x)$. En effet, en probabilité, chacun des segments individuels n'est pas partagé en deux tronçons, l'un blanc et l'autre noir, mais doit être considéré comme teinté de gris avec une densité égale à $F(x)$, donc variable de 1 = blanc, pour $x = 0$, à 0 = noir pour $x \infty$. La fraction blanc/blanc + noir n'est pas autre chose que la moyenne pondérée de n variables qui valent 1 tant que l'équipement est en vie et 0 quand il est mort. Chaque variable a une espérance mathématique égale à $F(x)$ et leur moyenne pondérée tend donc évidemment elle aussi vers $F(x)$.

La figure 29 montre comment, au fur et à mesure du temps, l'estimation de $F(x)$ s'améliore .

Aucune estimation de $F(x)$ n'est possible tant que $t \leq x$.

En résumé l'estimation de $F(x)$ est donnée, à l'instant t , par la fraction des équipements qui ont dépassé l'âge x parmi ceux qui ont une ancienneté supérieure ou égale à x .

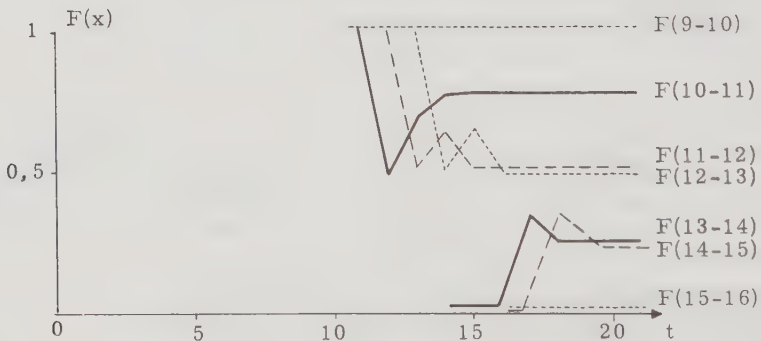


Fig. 29

Etat de l'information au temps $t = 15$

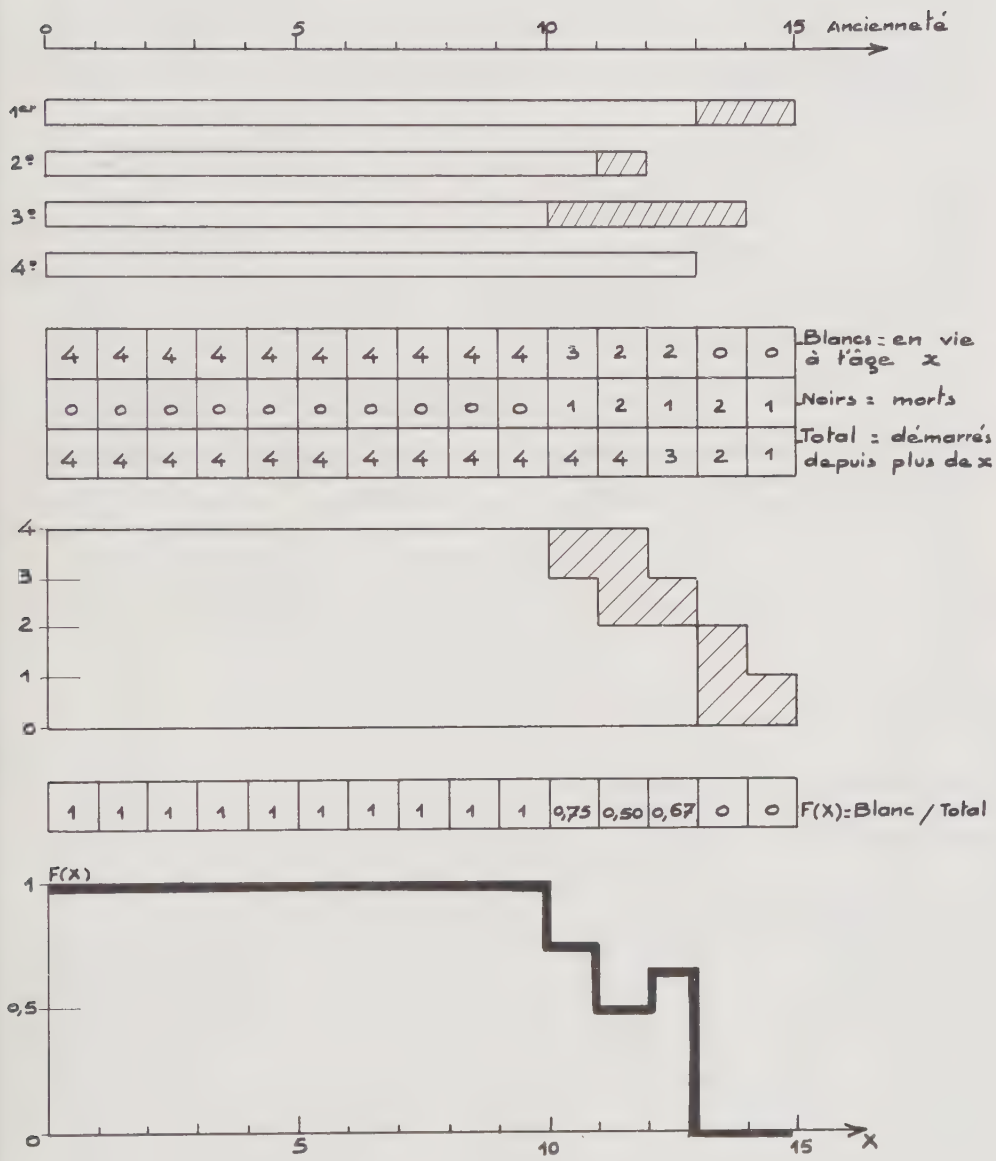
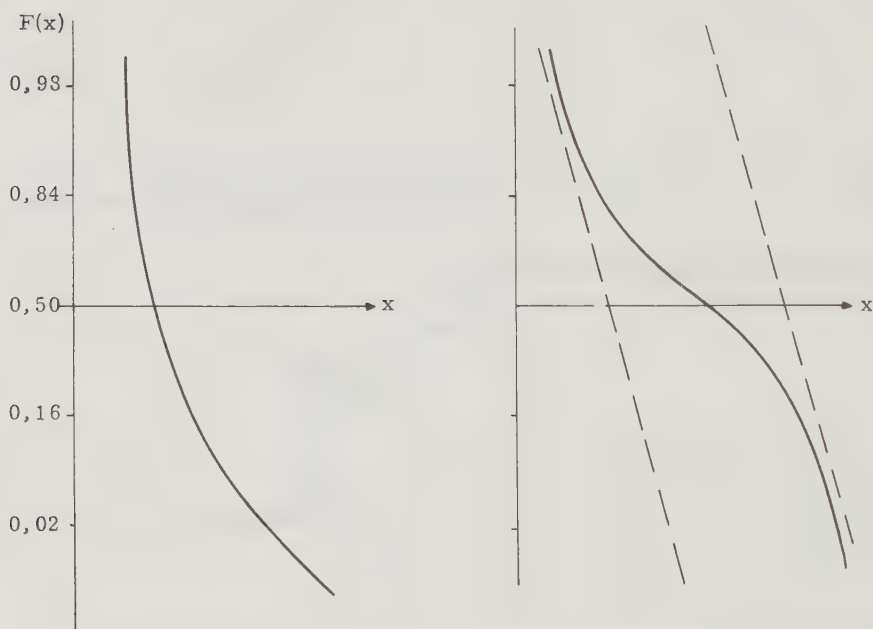


Fig. 28

4-2 - UTILISATION DE LA DROITE DE HENRY

Si nous appliquons cette méthode d'estimation des probabilités $F(x)$ à des durées gaussiennes - et nous avons annoncé en 1-3 les raisons que nous avons de nous intéresser spécialement à elles - il est tout naturel de pointer les points obtenus sur un graphique de Henry, comme sur la figure 1 ou sur la figure 26. Bien entendu le tracé sera incomplet tant que tous les équipements du lot ne seront pas morts et il n'y aura pas d'information pour tout x supérieur au temps t qui sépare le moment de l'estimation du démarrage du plus ancien des équipements étudiés. L'usage du graphique de Henry est cependant particulièrement précieux, D'une part les valeurs de $F(x)$, estimées à différents moments du temps, s'alignent en probabilité sur un segment de droite qui s'allonge progressivement sur la droite de moyenne m et d'écart-type s , rendant ainsi possible une estimation graphique de m et s , assez grossière certes, mais intéressante par sa simplicité, et d'ailleurs d'autant meilleure que le nombre d'équipements étudiés est plus grand et que le pourcentage des défaillances déjà enregistrées est plus élevé.

D'autre part le graphique de Henry permet de vérifier commodément la normalité des durées. Si celles-ci ne sont pas gaussiennes ou si elles résultent, comme cela arrive, du mélange de deux populations gaussiennes, les points $F(x)$ ne s'alignent plus sur une droite, mais dessinent une courbe dont l'aspect est caractéristique (figure 30).



durées non gaussiennes

mélange de deux populations gaussiennes

Fig. 30

Pour les durées sensiblement gaussiennes, il est tentant d'utiliser le graphique de Henry pour estimer graphiquement la moyenne et l'écart-type d'une population inconnue.

Considérons, à titre d'exemple, le cas d'un lot de 36 équipements, qui au moment de l'estimation est dans l'état suivant :

14 équipements démarrés il y a 21 mois :	1 mort à 18 mois
	2 morts à 19 mois
	2 morts à 20 mois
	9 en vie
22 équipements démarrés il y a 18 mois :	1 mort à 15 mois
	2 morts à 17 mois
	19 en vie

Le calcul des probabilités $F(x)$ s'effectue aisément, comme en 4-1 ci-dessus ; il permet de tracer la figure 31 qui conduit à attendre du lot une durée moyenne de 22 mois avec un écart-type de 3 mois.

Une telle conclusion serait illusoire, comme nous allons le montrer en testant une hypothèse sensiblement différente.

Testons l'hypothèse $m = 25, s = 6$ qui graphiquement s'écarte pas mal des valeurs empiriques de $F(x)$. Pour ce faire, il faut calculer l'état dans lequel se trouverait, en probabilité, le lot si l'hypothèse (m, s) était vraie ; puis il faut comparer les nombres d'équipements, que l'on rencontre dans les différentes classes, par un test de χ^2 .

Découpons donc le lot en 2 groupes, correspondant aux anciennetés 18 et 21 mois, puis chaque groupe en classes :

TABLEAU 2

		Ancienneté 21 mois				Ancienneté 18 mois			
		Morts		en vie	Total	Morts		en vie	Total
		avant 18 mois	de 18 à 21 mois			avant 15 mois	de 15 à 18 mois		
Etat réel du lot		0	5	9	14	0	3	19	22
Etat théorique du lot dans l'hypothèse $m = 25, s = 6$	p_i	0,12	0,13	0,75	1	0,045	0,075	0,88	1
	np_i	1,68	1,82	10,50	14	0,99	1,65	19,36	22
n° de classe		1	2	3		4	5	6	

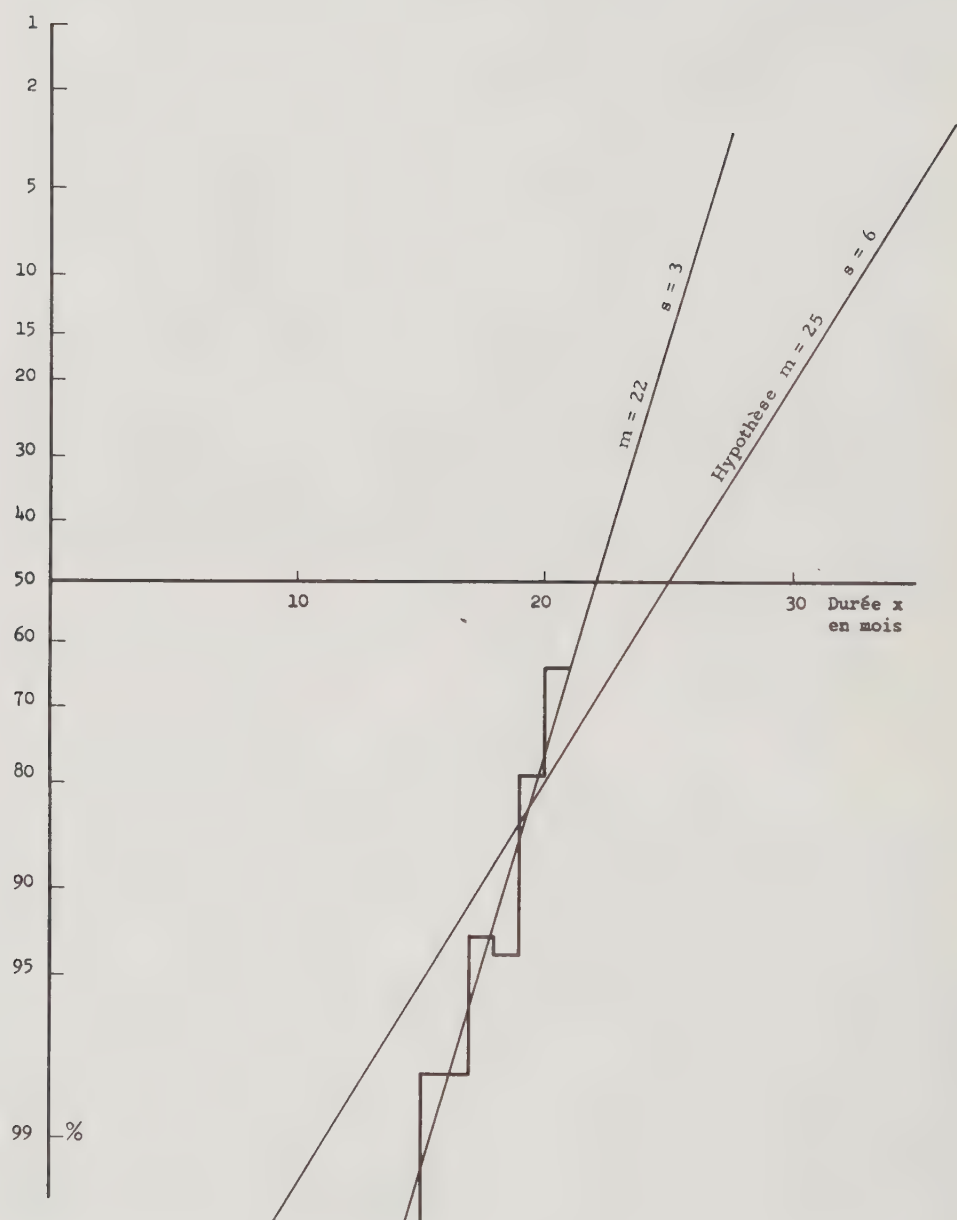


Fig. 31 - Probabilité de dépasser l'âge x : $F(x)$.

Pour appliquer le χ^2 , il faut que les classes contiennent un nombre théorique, np_i , au moins égal à 5, ce qui conduit à pratiquer des regroupements.

TABLEAU 3

Classes	Morts	en vie		Total
	1 + 2 + 4 + 5	3	6	
n_i	8	9	19	36
np_i	6,14	10,5	19,36	36
$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$	0,56	0,21	0,01	$\chi^2 = 0,78$

Une telle valeur de χ^2 , pour $v = 3 - 1 = 2$ degrés de liberté, a 73 % de chances d'être dépassée. L'hypothèse ($m = 25$, $s = 6$), bien qu'elle soit visuellement peu satisfaisante est cependant acceptable.

Nous avons ainsi recherché toutes les droites de Henry qui sont acceptables au seuil 5 %, soit par un test de χ^2 si la condition $np_i > 5$ permet de faire au moins deux classes, soit par un test binomial par "morts" et "vivants" dans le cas contraire.

Nous avons ainsi défini les deux familles de droites de Henry de la figure 32. Cette figure incite à une certaine prudence dans l'utilisation de la droite de Henry pour déterminer m et s à partir des premières valeurs observées de $F(x)$. Des tests plus rigoureux doivent être mis en oeuvre, qui donnent de m non pas l'estimation la plus probable (22 mois dans l'exemple ci-dessus) mais un véritable intervalle de confiance.

4-3 - DELIMITATION DU DOMAINE DE CONFIANCE DE (m , s)

En fait s est une inconnue au même titre que m et, à partir du moment où l'hypothèse de normalité des durées est admise, le problème est de déterminer les deux paramètres m et s qui sont nécessaires et suffisants pour caractériser complètement la loi de probabilité des durées (Cf. 1-3).

Le premier travail est donc de délimiter le domaine de confiance de l'hypothèse dans le plan (m , s) : ultérieurement, et ce sera l'objet du paragraphe 4-4, on pourra utiliser une information a priori sur s pour améliorer l'estimation de m .

Une méthode rapide, presque entièrement graphique, est fondée sur l'emploi du test binomial.

Reprenons les valeurs de $F(x)$ des 36 équipements du tableau 2 et de la figure 31. Si nous appliquons le test binomial (abaque de la figure 25) à chaque tronçon de la courbe empirique $F(x)$, nous obtenons sur le graphique de Henry deux lignes de confiance à 95 % de part et d'autre de la courbe empirique (tableau 4 et figure 33).

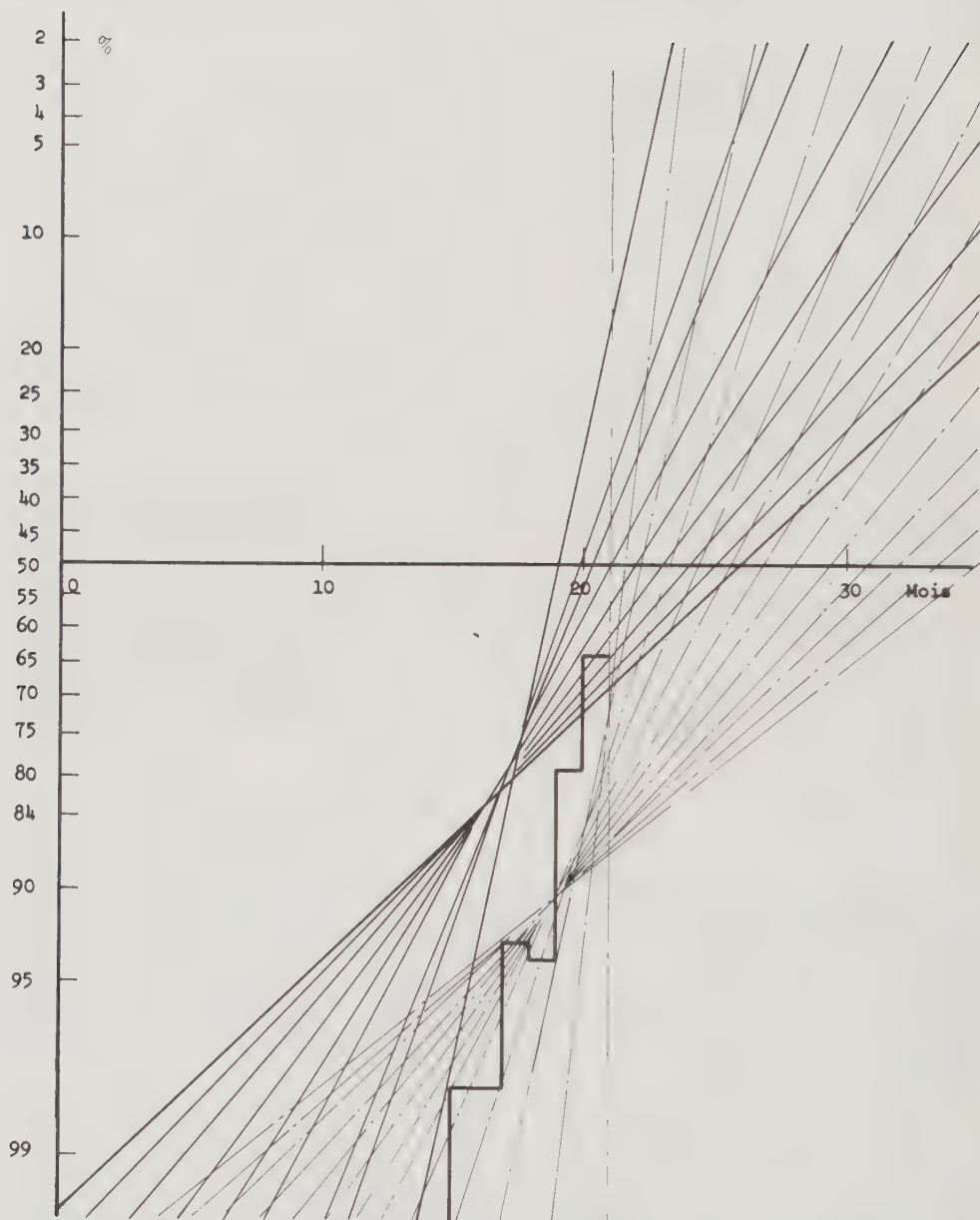


Fig. 32 - Familles de droites de Henry compatibles avec les observations au seuil 5 %.

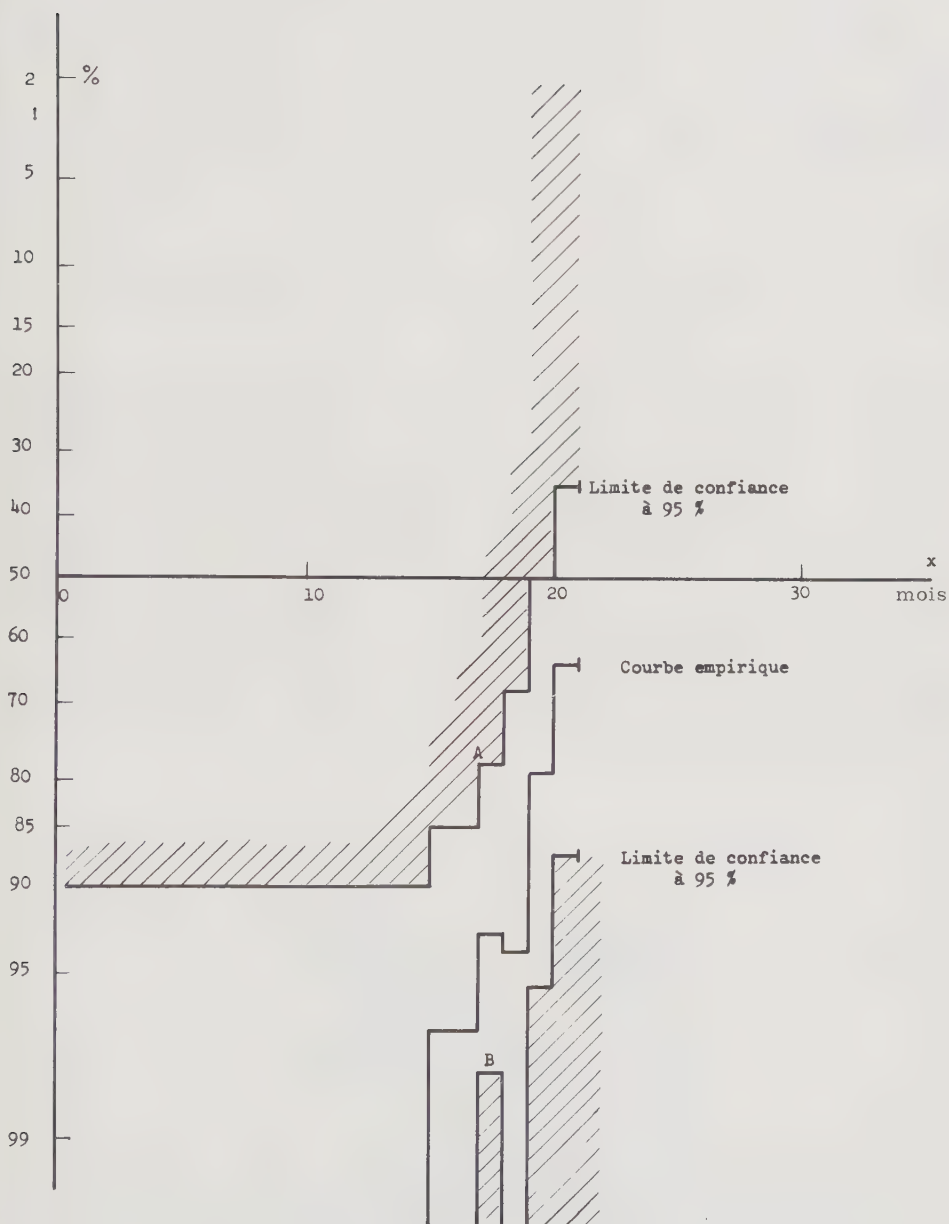


Fig. 33 - Probabilité de dépasser l'âge $x = F(x)$.

TABLEAU 4

Ancienneté x	0-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22
éléments étudiés n	36	36	36	36	14	14	14	0
éléments ayant dépassé l'âge x	36	35	35	33	13	11	9	0
F(x)	1	0,97	0,97	0,92	0,93	0,79	0,64	?
Limite de) supér. confiance)	1	1	1	0,98	1	0,955	0,875	?
à 95 %) infér.	0,90	0,85	0,85	0,78	0,68	0,50	0,35	?

En tout point d'abscisse x intérieur au domaine de confiance 95 % de la figure 33 il est possible de faire passer une famille de droites de Henry compatibles avec l'observation empirique $F(x)$. Intéressons nous aux familles extrêmes, et prenons pour exemple $x = 17,5$ mois par exemple. La famille passant par le point $A(F(x) = 0,78)$ se représente dans le plan (m, s) par une droite. Il y a en effet une relation linéaire entre le m et le s de toutes les droites de Henry passant par A, puisque $F(x) = G\left(\frac{x-m}{s}\right)$ où G est l'intégrale de Gauss. Ainsi à tout point du graphique de Henry correspond une droite du plan (m, s) , de même qu'à tout point du plan (m, s) correspond une droite sur le graphique de Henry. Ecrire $G\left(\frac{x-m}{s}\right) = 0,78$ revient à poser $\frac{x-m}{s} = -0,77$, soit encore $m = x + 0,77s$. De la même manière le point $B(F(x) = 0,98)$ engendre une famille de droites de Henry représentées dans le plan (m, s) par la droite $m = x + 2,05s$ (fig. 34).

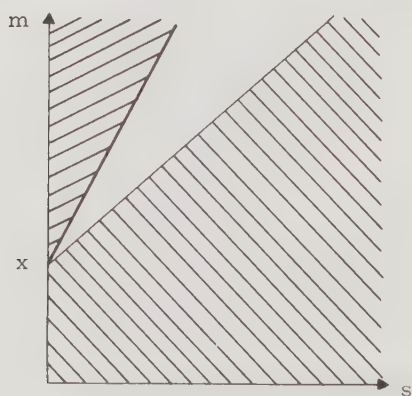


Fig. 34

Les deux droites de la figure 34 définissent une partie du plan (m, s) dans laquelle doit se trouver le point représentant la vraie population inconnue, pour être compatible, au seuil 5 %, avec l'information contenue au niveau d'ancienneté x .

Au début de l'utilisation du lot, aucune défaillance n'ayant encore été constatée, la limite de confiance supérieure de $F(x)$ n'a pas de sens et la pente de la droite $m = x + r s$ est infinie (figure 35). Ce n'est qu'à partir de la première défaillance que la limite supérieure prend un sens.

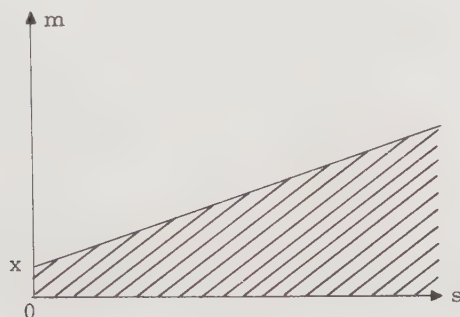


Fig. 35

Au contraire en fin d'utilisation, $F(x)$ est inférieur à 50 % et r est négatif (figure 36).

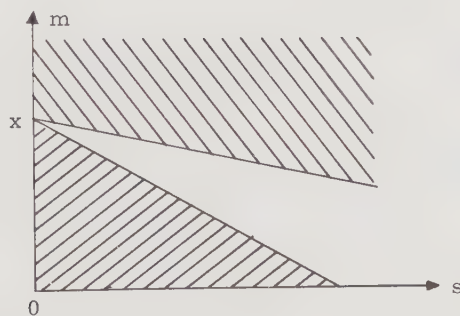


Fig. 36

Si l'on additionne les informations contenues à chaque niveau d'ancienneté x , on définit le domaine de confiance à 95 % du point (m, s) par la partie commune à tous les domaines relatifs aux différentes valeurs de x .

La figure 37 représente ainsi le domaine de confiance de m, s , pour le lot de 36 équipements pris comme exemple.

La construction graphique des droites $m = x + r s$ est facilitée par l'usage du graphique de Henry. On connaît évidemment le point $s = 0, m = x$;

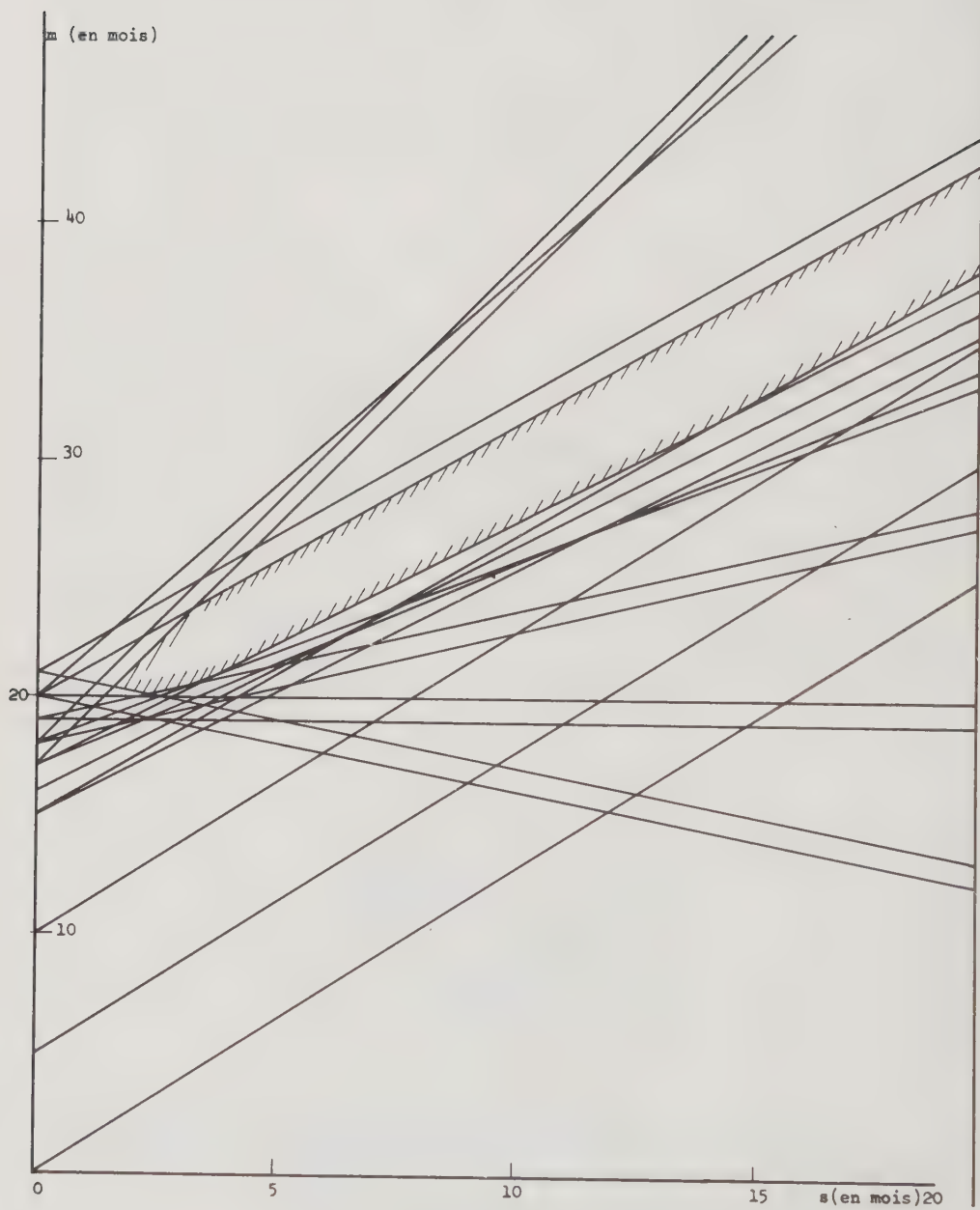


Fig. 37 - Domaine de confiance à 95 %.

il suffit d'y adjoindre un deuxième point que l'on obtient en faisant passer par le point $F(x)$ (A ou B sur la figure 33) une droite quelconque dont on mesure facilement le m et le s . On peut aussi remarquer que les ordonnées $F(x)$ du graphique de Henry sont proportionnelles à r et les graduer en r .

Pour montrer comment, le temps passant, l'information qui s'accumule améliore l'estimation de m et de s en resserrant le domaine de confiance autour de la vraie valeur, nous avons représenté sur les figures 39 et 40 différents tracés du domaine de confiance à 95 % de (m, s) pour le lot de 67 équipements, tous morts aujourd'hui, de la figure 38. Tout ce lot avait été démarré au même moment. Nous nous sommes fictivement replacés aux temps $t = 0, 24, 36, \dots, 72$ mois après le démarrage pour définir, par la méthode exposée dans ce paragraphe, le domaine de confiance du point (m, s) .

Le moment où le domaine de confiance se referme peut être précisé ; ce phénomène se produit quand la pente de la droite $m = x + r s$ du faisceau supérieur devient égale à la plus forte des pentes des droites du faisceau inférieur. Ainsi sur le graphique de Henry de la figure 38 ; pour $x = 39$ mois, la limite de confiance supérieure atteint le niveau 94,5 %. A ce moment la droite du faisceau supérieur a pour pente $r = 1,6$; elle est parallèle aux premières droites du faisceau inférieur (x compris entre 0 et 24 mois). A partir de ce moment le domaine se rétrécit rapidement et on peut donner à m un intervalle de confiance de plus en plus serré, alors que s reste largement indéterminé (Cf sur la figure 39 le graphique relatif à $t = 48$ mois).

Le domaine de confiance de (m, s) peut être vide, ce qui signifie qu'aucune droite de Henry n'est compatible avec les limites de confiance à 95 % de $F(x)$. Autant dire que les durées ne sont pas gaussiennes, comme sur la figure 30.

4-4 - UTILISATION D'UNE INFORMATION A PRIORI SUR s

Au début de l'exploitation d'un nouveau lot, il serait particulièrement précieux de disposer d'une information supplémentaire pour réduire l'indétermination existant sur m , en particulier tant que le domaine de confiance n'est pas fermé.

Le cas le plus simple est celui où l'on connaît à l'avance l'écart-type. Dans ce cas on utilise directement le graphique de Henry pour faire passer par les deux limites de confiance à 95 % de $F(x)$ les deux droites de pente s dont les intersections avec l'ordonnée $F(x) = 0,5$ donnent l'intervalle de confiance à 95 % de m (figure 41).

L'estimation de m est évidemment beaucoup plus rapide, comme le montre la figure 42, où nous avons représenté les étapes par lesquelles on serait passé pour estimer m , au fur et à mesure du temps, d'une part si on n'avait rien su de l'écart-type - et ce n'est alors qu'une présentation différente des graphiques des figures 39 et 40 - d'autre part si on avait su à l'avance que s valait 10 mois. Cette information supplémentaire aurait permis dans ce cas d'estimer la limite supérieure de m environ 20 mois plus tôt.

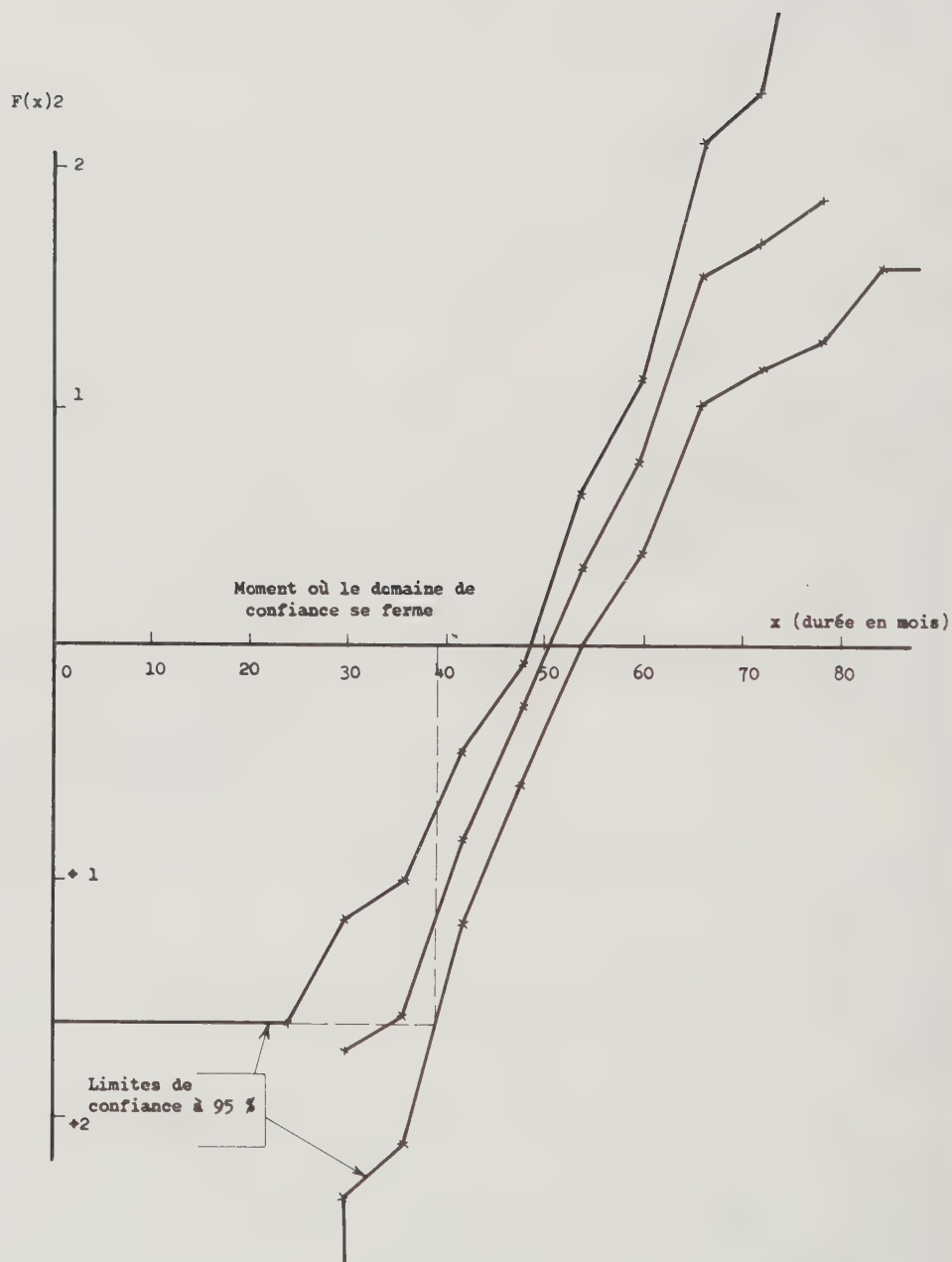


Fig. 38 - 67 équipements ; moyenne 52 mois ; écart-type 10 mois.

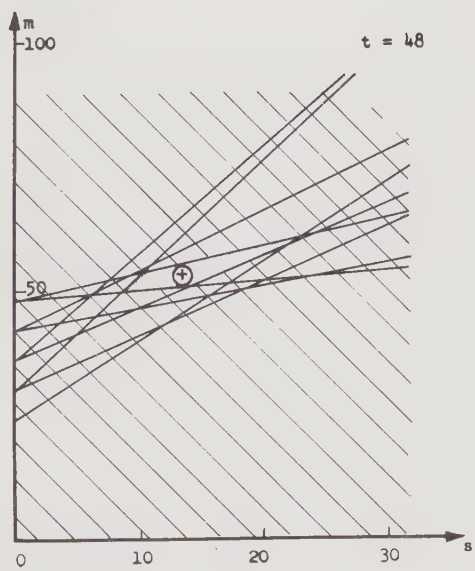
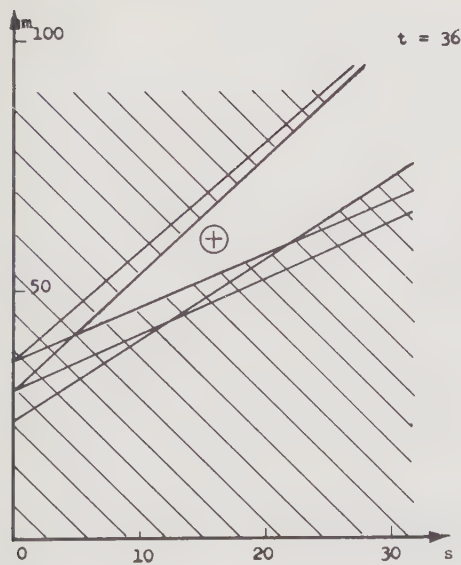
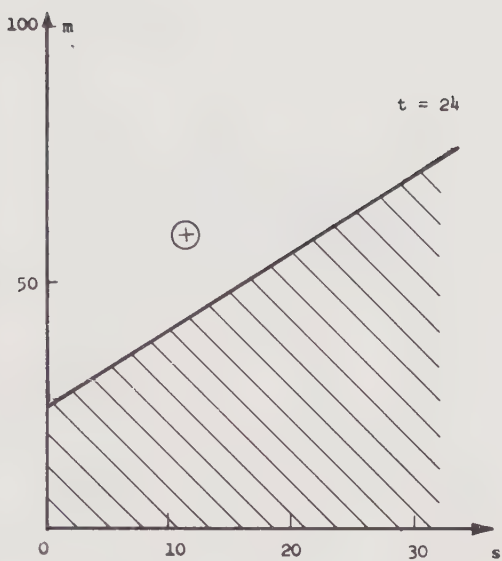
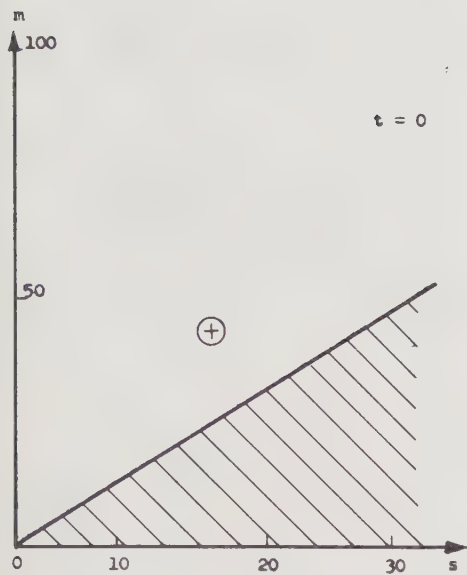


Fig. 39

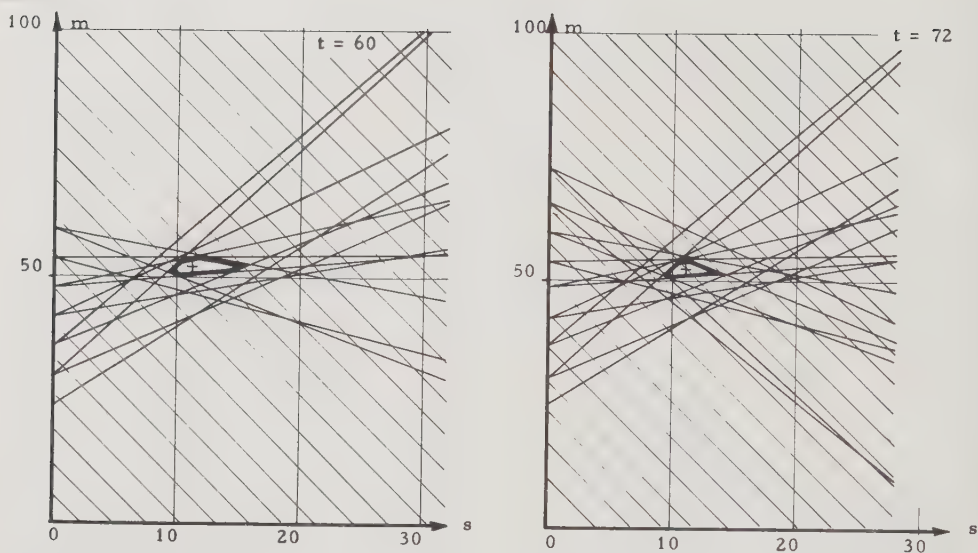


Fig. 40

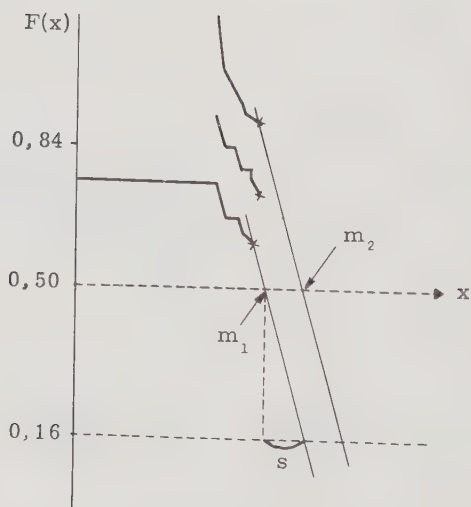


Fig. 41

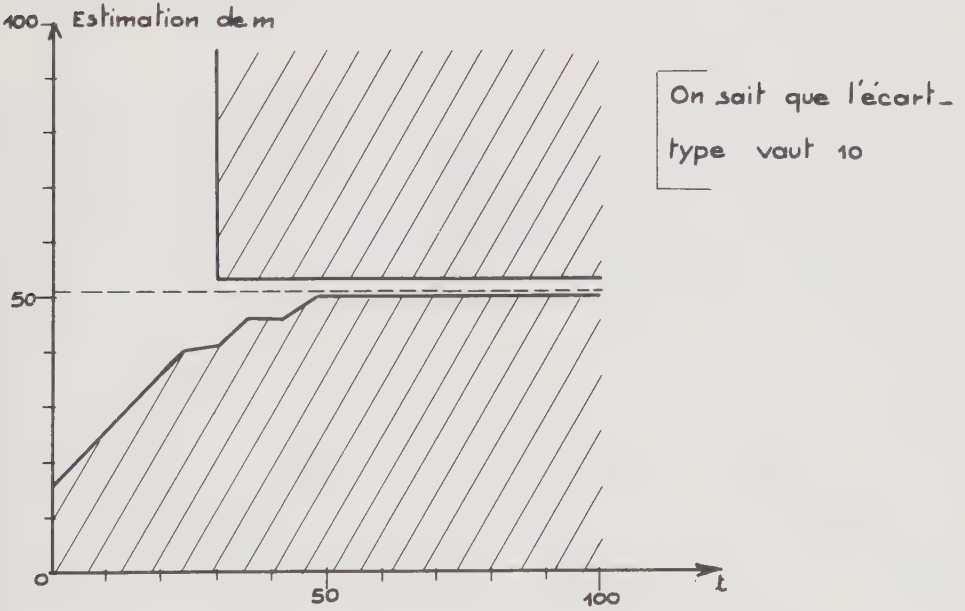
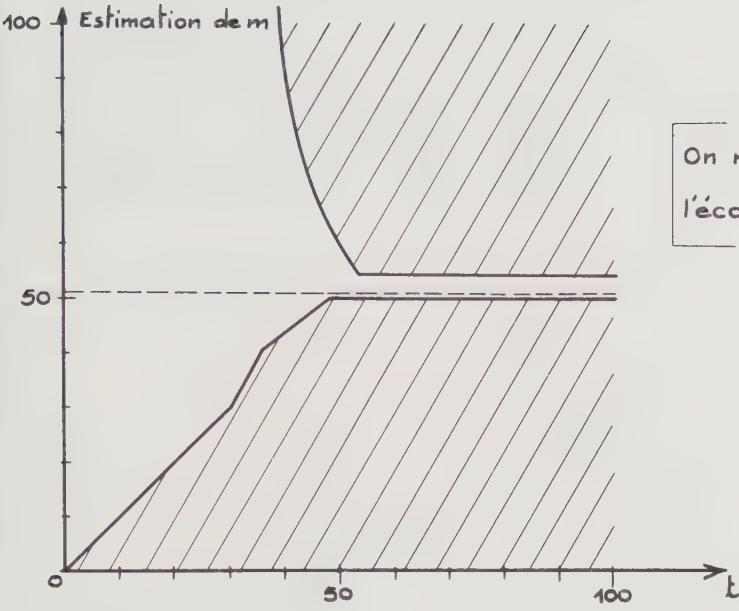


Fig. 42

S'il n'est pas possible de connaître a priori l'écart-type, il arrive souvent que l'étude de lots d'équipements analogues ait apporté une information sur un certain domaine de variation possible de s .

Dans le cas des cathodes des cellules d'électrolyse pour l'aluminium, nous avons ainsi recueilli une information sur s en étudiant 45 lots différents. Cette étude n'a pas fait apparaître, contrairement à notre attente, de relation entre la moyenne et l'écart-type, mais elle a permis de tracer l'histogramme des 45 valeurs s observées (figure 43). Notons au passage que ces écarts-types suivent sensiblement une loi de distribution log-normale (figure 44).

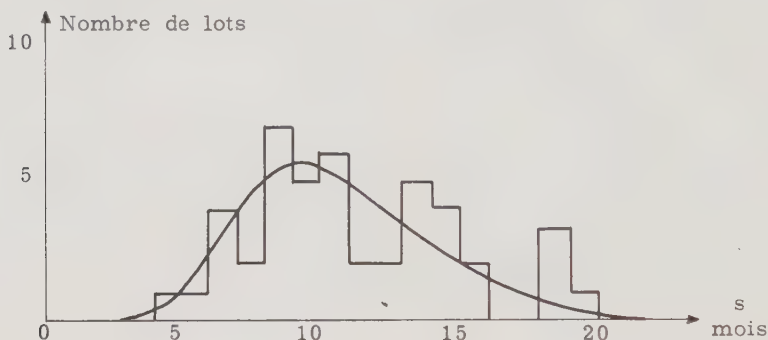


Fig. 43

Nous pouvons donc définir une fonction de répartition $\varpi(s)$ telle que $\varpi(s) ds$ soit la probabilité que s soit compris entre s et $s + ds$. Nous allons utiliser cette information a priori pour calculer l'intervalle de confiance de m .

A un instant t donné, on a constaté K défaillances parmi n . Calculons la vraisemblance de $m < m_1$. Si l'écart-type était s , la probabilité de défaillance serait $p = G\left(\frac{t - m_1}{s}\right)$ où G est l'intégrale de Gauss.

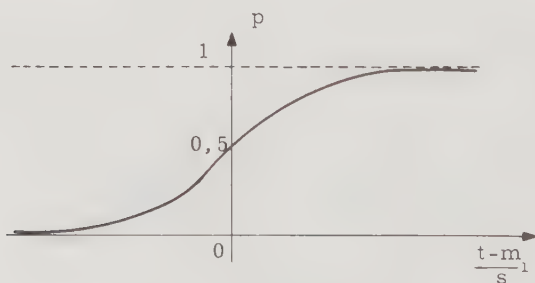


Fig. 45

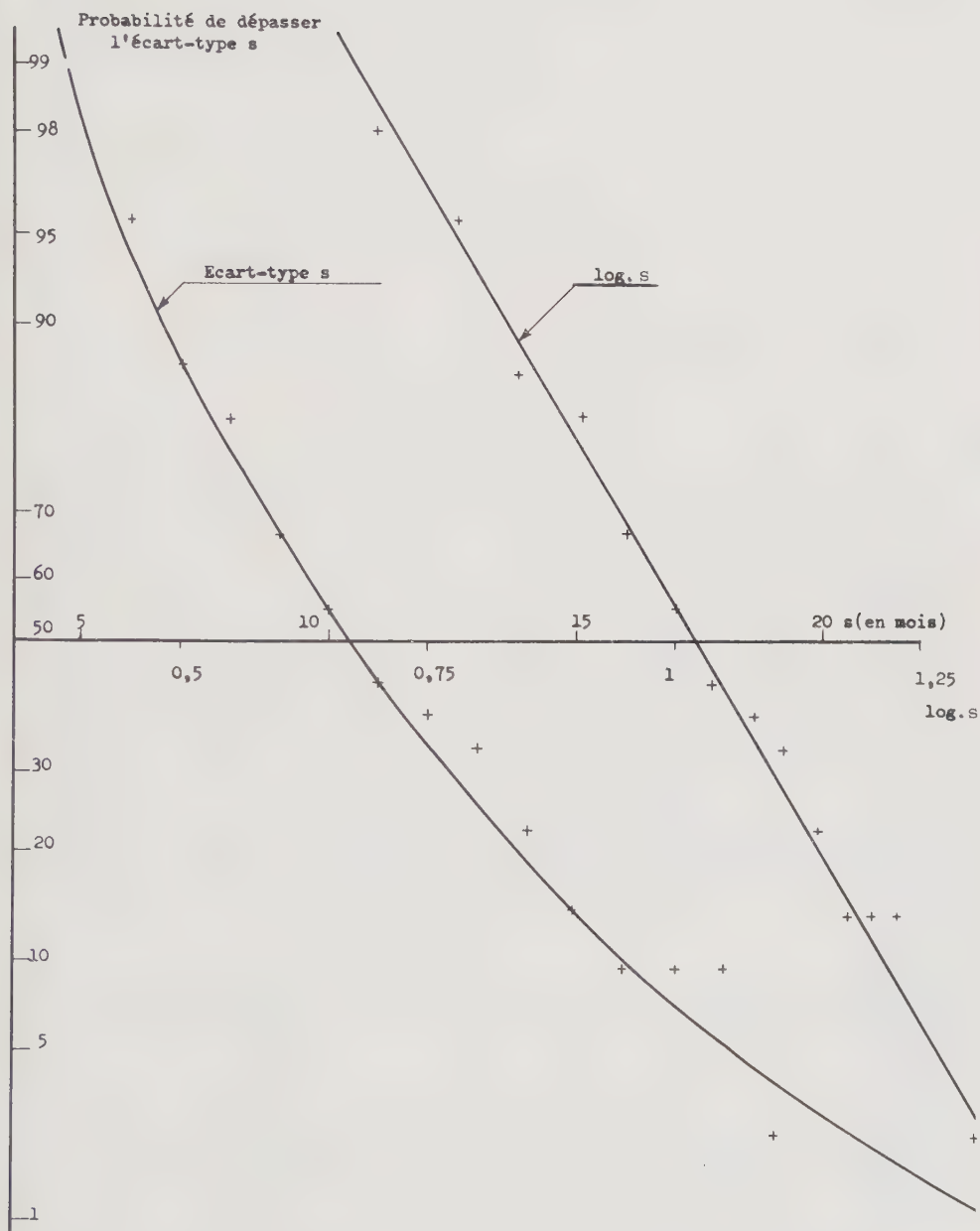


Fig. 44 - Distribution des écarts-types de 45 types de cathodes.

Si m_1 et s étaient vrais, la probabilité de constater de 0 à K défaillances avant le temps t serait $P(K, n, p)$, probabilité cumulée de la loi binomiale.

Si s était vrai, la vraisemblance que m soit inférieur à m_1 s'écrit :

$$\text{Prob.}(m < m_1)_{s \mid s} = P \left[K, n, G \left(\frac{t - m_1}{s} \right) \right]$$

Compte tenu des probabilités a priori $\varpi(s)$, on écrit :

$$\text{Prob.}(m < m_1) = \int_0^\infty P \left[K, n, G \left(\frac{t - m_1}{s} \right) \right] \varpi(s) \, ds$$

Le tableau 5 donne un exemple de calcul ; les probabilités P y ont été calculées par la loi de Poisson.

TABEAU 5

	t = 30	K = 3		n = 67		m ₁ = 40
s	$\frac{t - m_1}{s} = r$	G(r)	n G	P(n G, K)	$\overline{w}(s) \Delta s$	$P \overline{w}(s) \Delta s$
0,5	- 20	0	0	1	0	0
1,5	- 6,67	0	0	1	0	0
2,5	- 4,00	0	0	1	0	0
3,5	- 2,86	0,0021	0,140	1	0,003	0,0030
4,5	- 2,22	0,0132	0,885	0,9866	0,017	0,0170
5,5	- 1,83	0,0336	2,250	0,7823	0,040	0,0313
6,5	- 1,54	0,0618	4,140	0,4085	0,070	0,0276
7,5	- 1,33	0,0918	6,150	0,1394	0,090	0,0125
8,5	- 1,18	0,1190	7,980	0,0424	0,120	0,0051
9,5	- 1,05	0,1469	9,850	0,0118	0,120	0,0013
10,5	- 0,95	0,1711	11,450	0,0036	0,110	0,0003
11,5	- 0,87	0,1921	12,800	0,0013	0,090	0,0001
12,5					0,080	
13,5					0,070	
14,5					0,056	
15,5					0,034	
16,5					0,030	
17,5					0,019	
18,5					0,012	
19,5					0,011	
20,5					0,007	
21,5					0,005	
22,5					0,004	
>23					0,012	
					1,000	0,0982 = Prob(m < 40)

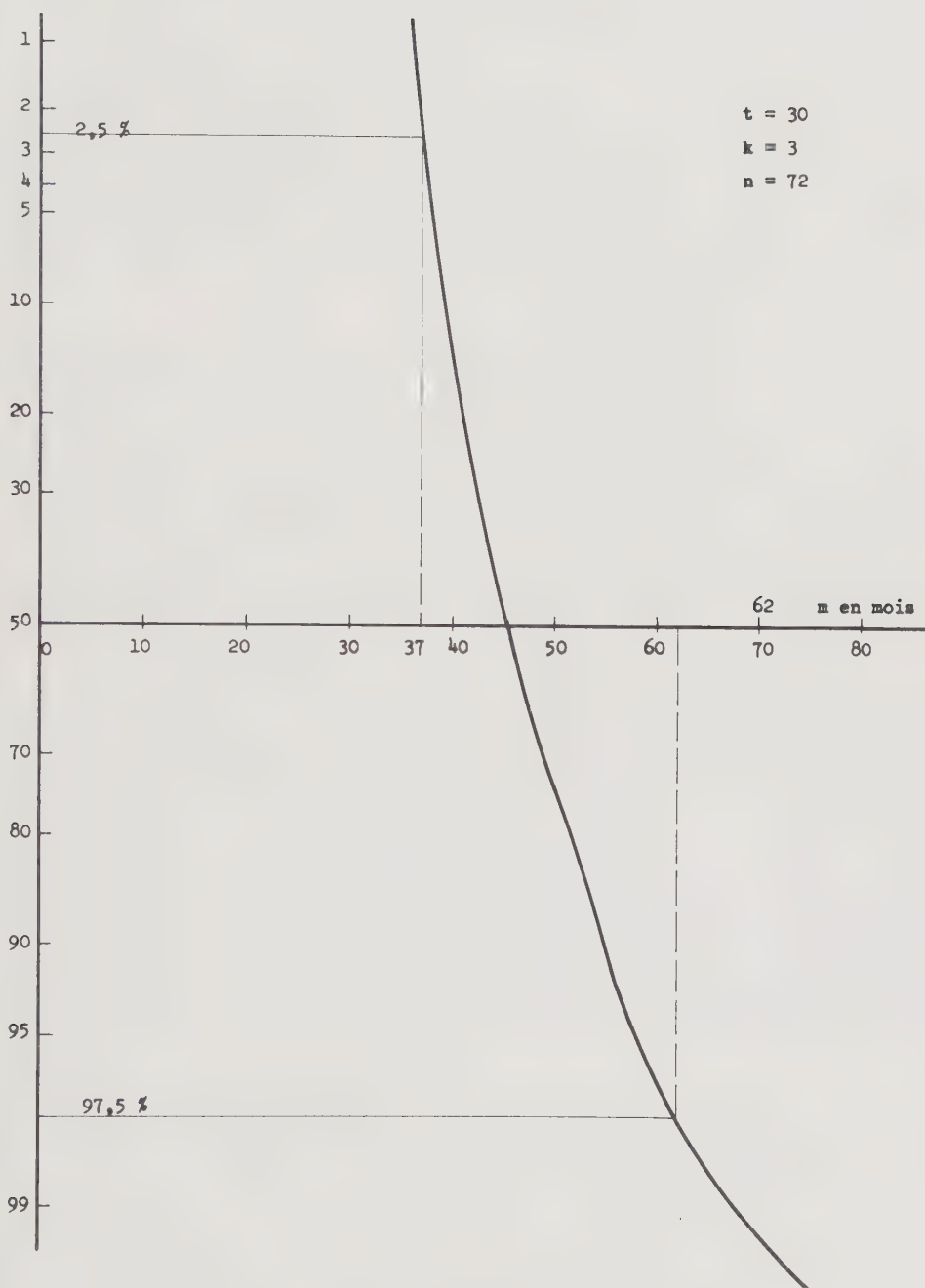


Fig. 46 - Probabilité ($m < m_1$).

En faisant le calcul pour différentes valeurs de m_1 et en reportant les vraisemblances obtenues sur un graphique comme celui de la figure 46, on obtient facilement les limites à 95 % de m .

Pour montrer l'intérêt de ce mode de calcul nous l'avons appliqué au lot de 37 équipements qui nous a déjà servi d'exemple et nous avons tracé la figure 47 où l'on voit comment l'estimation de m se précise rapidement au début de l'exploitation du lot, à condition d'utiliser l'information a priori que contient la loi de probabilité $\varpi(s)$: on obtient ainsi une estimation presque aussi rapide que si l'on connaissait à l'avance l'écart-type. Par contre il faut abandonner cette façon de faire au profit de la méthode graphique dès qu'assez de défaillances ont été constatées pour que l'écart-type vrai commence à se dégager, ce qui se produit dans notre exemple à 48 mois, quand 40 % des équipements sont morts.

Notons que, tant qu'aucune défaillance n'a encore été constatée, le calcul de la limite supérieure de m n'a évidemment pas davantage de sens dans cette méthode que dans l'autre.

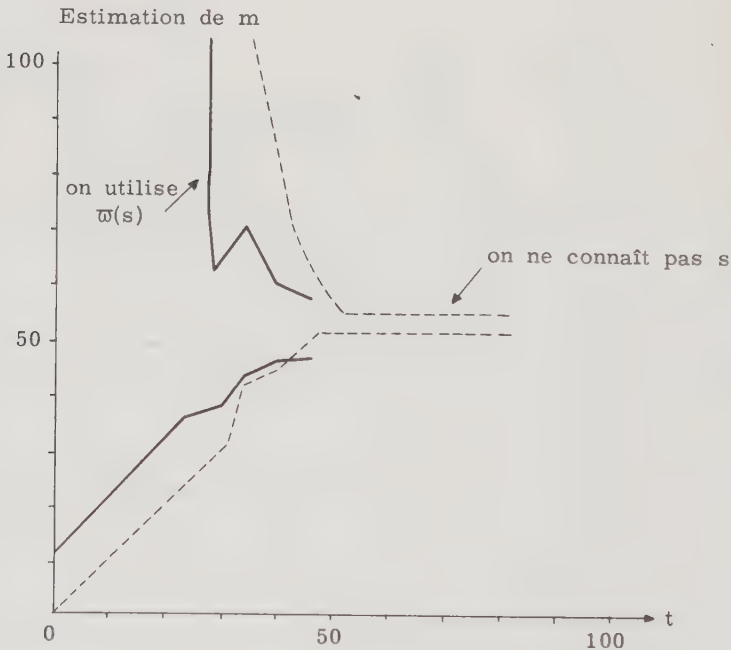


Fig. 47

5 – CONCLUSION

Les trois chapitres de cette étude sont assez différents, d'esprit et de méthode, pour justifier des conclusions distinctes.

L'étude mathématique des renouvellements fournit à l'utilisateur diverses formules pour calculer, en probabilité, le devenir du parc dont il a la charge. D'un point de vue plus général, le premier chapitre jette aussi une lumière originale sur le passage des mathématiques du discontinu à celles du continu. A voir s'amorcer le mécanisme de la convergence vers un régime stationnaire, dès que les durées deviennent tant soit peu aléatoires, on est conduit à identifier les mathématiques du continu à celles de l'aléatoire et les mathématiques du discontinu à celles de la certitude.

L'intérêt du deuxième chapitre est de mettre une méthode simple et sûre à la disposition de qui a la responsabilité de gérer économiquement un parc à renouvellement aléatoire, d'en prévoir les approvisionnements, d'en contrôler les réalisations. Cette méthode permet des économies substantielles par rapport à la pratique courante, qui a plutôt tendance à gonfler les approvisionnements, car la crainte du manque à produire l'emporte souvent dans l'esprit des techniciens sur les soucis financiers.

Quant aux méthodes d'estimation auxquelles est consacré le dernier chapitre, elles ouvrent la porte sur ce secteur assez spécial de la statistique où le temps joue le rôle principal, en ne mettant l'information à notre portée qu'au fur et à mesure du déroulement d'une histoire. Elles montrent qu'il n'est pas nécessaire, comme on pourrait le craindre, d'attendre la fin de l'histoire pour en connaître l'essentiel. Ainsi la durée probable d'un lot peut elle être pratiquement connue alors que 50 % de ces éléments sont encore en vie.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 M. FRECHET - Leçons de statistique mathématique - 4^e cahier.
- 2 A. K. GUPTA - Estimation of the mean and standard deviation of a normal population from a censored sample.
- 3 M. DENIS-PAPIN et A. KAUFMANN - Cours de Calcul opérationnel.
- 4 C. W. CHURCHMAN, R. L. ACKOFF et E. L. ARNOFF - Eléments de recherche opérationnelle (le chapitre XVII "les modèles de remplacement" contient les références de textes d'EPSTEIN et de LOTKA).

REMERCIEMENTS

L'auteur est reconnaissant à tous ceux qui, tout au long de son étude, l'ont aidé de leurs encouragements, de leurs critiques, ou de leur appui matériel.

Il tient particulièrement à citer les noms de ceux sans lesquels ce travail n'aurait sans doute pas pris sa forme présente :

- A. JEANTIN, ingénieur à la Compagnie Pêchiney, auprès de qui il a rencontré pour la première fois les renouvellements aléatoires.

- R. PRADAYROL, professeur au lycée Michel Montaigne, et S. REGNIER, statisticien de la Compagnie Pêchiney, qui l'ont aidé de leurs conseils.

- Le service de calcul électronique de la Compagnie Pêchiney qui a assuré les calculs numériques.

- G. MALECOT et R. PARIS, professeurs à la faculté des Sciences de Lyon, qui l'ont encouragé à rédiger ses notes en forme de thèse.

- P. MOREL, directeur de la division Electrométallurgie de la Compagnie Pêchiney, qui a autorisé la publication de ce travail et qui en a rendu possible l'édition.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
I - INTRODUCTION.....	3
1-1 - La notion de renouvellement aléatoire.....	3
1-2 - Intérêt technique et économique de la prévision des durées.....	3
1-3 - Rôle de la loi de Gauss dans les problèmes de durées aléatoires.....	4
1-4 - Plan de l'étude.....	4
2 - MATHEMATIQUES DE RENOUVELLEMENT.....	7
2-1 - Propriétés mathématiques générales.....	7
2-2 - Résolution de l'équation intégrale.....	8
2-3 - Comportement à court terme.....	10
2-4 - Inversion par la méthode des résidus.....	11
2-5 - Convergence vers le régime stationnaire.....	14
2-6 - Etude de quelques lois de probabilité.....	15
2-7 - Identification des générations successives.....	18
2-8 - Comparaison des différentes formules de prévision...	20
3 - GESTION D'UN PARC A RENOUVELLEMENT ALEATOIRE...	29
3-1 - Prévision des renouvellements.....	29
3-2 - Définition de la politique d'approvisionnement.....	30
3-3 - Cas d'un parc stationnaire.....	37
3-4 - Cas d'un parc quelconque.....	37
3-5 - Contrôle des défaillances.....	38

	Pages
4 - ESTIMATION DE LA LOI DE PROBABILITE DES DUREES...	43
4-1 - Estimation de la probabilité $F(x)$	43
4-2 - Utilisation de la droite de Henry.....	46
4-3 - Délimitation du domaine de confiance de (m, s)	49
4-4 - Utilisation d'une information a priori sur s	55
5 - CONCLUSION.....	65
Bibliographie.....	66
Remerciements.....	67

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

LES ALEAS DE LA DEMANDE ET LE MECANISME DES POINTES

Vu et approuvé :

Le Doyen de la Faculté des Sciences
Jean BRACONNIER

Vu :

Les membres du Jury,
G. MALECOT
R. PARIS
MARTEL

Vu et accordé le permis d'imprimer :

Lyon, le 28 janvier 1964

Le Recteur

Président du Conseil de l'Université
P. LOUIS

IMP. LOUIS-JEAN — GAP

Dépôt légal n° 174 — 1954

Errata

Page 8 - ligne 8 . $\frac{N}{m} \int_t^{+\infty} F(x) dx$ au lieu de $\frac{N}{m} \int_0^{+\infty} F(x) dx$

Page 12 - ligne 6. ajouter +.... après $p^2 \frac{m_2(a)}{2!}$

Page 18 - ligne 9. $h(t)$ au lieu de $h(f)$

Page 33 - ligne 26. cumulée au lieu de cumulés

Page 56 - en haut . $F(x)$ au lieu de $F(x)^2$

Page 63 - ligne 3 . $n = 67$ au lieu de $n = 72$

Page 63 - ligne axiale. 62 à déplacer vers la gauche

Page 64 - ligne 5 . 67 au lieu de 37

Page 65 - ligne 18 . aux au lieu de au

Page 65 - ligne 24 . ses au lieu de ces

